a gr. b. 899
1437
Euclides

Auct. Gr. Vet. 101. p. 540.

Euclidis
15. Bücher Teutſch,

Auf eine beſondere kurtze Art, iedoch ausführlich abgehandelt, und ſo wohl in Linien, als durch Zahlen, *in ſpecie* das Zehende Buch, mit denen ſonſt ſchwer fallenden *irrational*-Größen, Linien, und Flächen, aufs deutlichſte *definiret*, erkläret und bewieſen, auch durchgehends alle 15. Bücher an ſtatt der ſonſt gewöhnlichen *obſcuren* Holtzſchnitte mit erforderlichen Kupffer-Figuren,

Benebſt einer hierzu nöthig habenden rational- und irrational- auch binomiſchen Algebra verſehen.

durch
Christian Scheßlern
ist zu finden
in Dreßden, beym Autor, und Johann Christoph Mieths seel. Erben
in Leipzig, bey itztgenenten Mieths s. Erben, und August Martini Buchh.
1723.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

EHe und bevor man die Arbeit folgender 15. Bücher Euclidis, ſolche entweder recht genau zu examiniren, oder auch wenigſt nur verſtändlich durchzuleſen, antrit: Iſt allerdings höchſt nötig ſich der Algebra, ſo viel nur immer möglich, bekand zu machen, ſintemaln ohne deren Erkäntnüs in den fünfften, 6. 7 und 8ten, beſonders aber in 9ten und 10ten Buch auch fernerhin, ſchwerlich fortzukommen. Und ob wohl in dem vorlängſt edirten Arithm. Haupt-Schlüſſel dieſerhalben gnügliche Nachricht zufinden (alß wohin mich voritzo mit beziehe) ſo habe dennoch auch hier einen Entwurff, der rational- zugleich auch irrational-Algebra, nicht weniger derer binomiorum und reſiduorum erforderliche Berechnung (umb ſolches mit bey der Hand zu haben) dieſen 15. Büchern Euclidis, nemlich: ſo viel itzt gedachten 15. Büchern etwa nötig beyzufügen, urtheilen können, voran ſtellen wollen.

Die Art des Euclidis Schrifften, hier meiſt Algebraicè oder durch Zahlen dem Beweiß zuführen, dürffte auf dieſe oder jene Manier zu cenſiren Anlaß geben, dieſerhalben nun finde nötig, hierüber meine Gedancken in etwas zueröffnen.

Es kam bey concipirung ſolcher 15. Bücher Euclidis, vornemlich zweyerley mir zubetrachten für, als eines theils: Ob ich ſelbige kurtz, oder aber andern theils: langweiliger, (welches bey einigen (ob wohl irrig) ausführlicher heiſet) abhandeln und demonſtriren ſolte.

Nach dieſen zweyerley Sorten nun, erachtete auch des Euclidis Liebhabere anzutreffen alſo: daß einigen, beſonders denen der Algebra kündigen, vielleicht die Kürtze angenehm ſeyn würde, gegentheils aber andern, deme dieſes zu obſcur ausfallen, dafür eine weitläufftigere, und nach ihrer Meynung deutlichere Erklärung und Beweiß verlangen möchten. Nolens volens muſte nur eine Partey erwehlen, reſolvirte mich dahero zu der erſtern, betrachtende: Wie durch allzuweitläufftig und langweiliges erklären viele Sachen (zumahl der Matheſin concernirende) offt mehr damit verdunckelt, alß erläutert würden. Weßwegen auch der Kürtze und Deutlichkeit halber mit dem Beweiß zu verſchiedenen mahlen (ob wohl etwas gegen die Ordnung) nicht allezeit das vorhergehende, ſondern nötig findende, auch wohl das folgende, ſo gleich allegirt, alſo habe zum Ex. die Definition und Berechnung derer 13. irrational differirender Linien, anfangs

des

des 10ten Buchs (welche ſonſt erſtlich nach erwehnten 10ten Buchs 112. Propoſ. zubefinden) geſtellet und erkläret, Urſach: Weil deren Arbeit albereit mit der 22. Propoſition dieſes 10ten Buchs angehet. Und alſo auch in andern.

Zuläugnen iſt nicht, wie die Beweiſe von erſten bis zum 9ten Buch, zu verſchiedenen maln, wohl mit mehrern Umſtänden hetten können ausgeführet werden, hingegen da dergleichen Weitläufftigkeit ſich ferner beyn 9ten noch mehr aber beyn 10ten Buch &c. nicht füglich wolte appliciren oder continuiren laſſen, alß erachtete nötig, davon abzugehen. Weßwegen auch faſt durchgehends, waß dem Sinn ſo gleich vernehmlich oder von ſich ſelbſt deutl. beyzufallen geurtheilet, mit vielen Umſchweiffungen vorzuſtellen lieber angeſtanden. Zum Ex. Wenn man die 2.3.19. 22.25.29.38.40.42 und 48. Propoſition des erſten Buchs, item die 1.2 und 3te Propoſition des zweyten Buchs, und alſo andere mehr dergleichen fernere, welche albereit vorhero zur Gnüge erkläret und bewieſen, oder die einem ieden ſo nur der Geometrie in etwas kundig, ohne dis alsbald vernunfftmäßig beyfallen, mit langweiligen Beweiſen verſehen wollen, würde die unnöthige Arbeit gar deutlich hervor geblicket haben. Und dieſer Urſach halber iſt beſonders in den 7ten 8ten und 9ten Buch der Beweiß kurtz gefaßet, weil diejenigen, welche der Algebra, folglich der Zahlen und Figuren Natur etwas mehr als andere kundig, ohne dis ſo gleich gewahr wer-

den, daß die Sache wahrhafft, und anders nicht ſeyn könne: Da in Gegentheil denen, welchen die Arithmetica alzuwenig oder nichts bekand, auch mit der allerweitläufftigſten Beſchreibung, dennoch ſchlechter Vortheil dürffte geſchaffet werden.

Es weren auch dieſe 15 Bücher noch etwas genauer zu faßen, und einige Propoſitiones, als welche theils nur wieder repetiret werden, gar weg zulaſſen geweſen, alſo iſt zum Ex. die 11. Prop. des 2ten, und denn die 30 Propoſition des 6ten Buchs einerley Vortrag und Arbeit Ebener maßen iſt die 21. und 23. Propoſ. des 5ten, ingleichen die 22. Propoſ. des 7ten Buchs einerley Natur und Art, iedoch aber dem Urtheil zu entgehen, als ob man des vortreflichen Euclidis Ordnung reformiren wollen, iſts vielmehr dabey gelaſſen worden. Ferner wird zuträglich fallen, die bey dergleichen Materia ſonſt gewöhnliche undeutliche Holtzſchnitte, hier die Figuren in Kupffer erkäntlicher vorzuſtellen, weiln niemand in Abrede ſeyn kan, daß bey dergleichen Abhandlung unförmliche Holtzſchnitte, folglich obſcure Bildungen, groſſe Verhinderung verurſachen, und hingegen deutliche Figuren, die Arbeit gar ſehr erleichtern.

In übrigen kan nicht recht geſaget werden, daß in ſolchen des Euclidis 15. Büchern ſehr viel Krafft enthalten, und vor einen unerſchöpfflichen Brunnen zu achten, auch verſchiedene Paſſagen darin-

darinne anzutreffen, (gleich wie bey dem 10ten Buch mit mehrern zu erſehen ſeyn wird,) die alle erdenckliche Kleinigkeiten an Subtilitæt gar weit übertreffen, wie unter andern in der 47. Propoſition des 1ſten, der 11. Prop. des 2. der 16 und 35. Prop. des 3ten, der 10ten des 4ten, und 19. Prop. des 6ten Buchs, in ſpecie aber, in erwehnten 10ten Buch durchgehend, und fernerweit enthalten, deren Käntniß ja ſo nutz als nothwendig.

Weßwegen dann Euclides billig, aller nach ihme kommenden, als auch noch verhandenen Mathematicorum Vorgänger geweſen. Man ſchreibe demnach von denen Zahlen, Flächen und Cörpern, wie es auch geſchehe, ſo wird doch alles auf dieſe des Euclidis 15 Bücher fundiret ſeyn. Dahero ſich dann nicht wenig Klugdünckende gar ſehr vergehen, vermeinende, der Welt was neues zu verhandeln, welches doch vor ſo viel 100 ja 1000 Jahren albereit ein weit mehreres und theils beßeres bekand geweſen: iedoch die Welt will dem gemeinen Sprichwort nach, betrogen ſeyn, und lieber mit leichter Mühe im finſtern herum tappen, alß das Wahrhaffte von dem wenig tauglichen, mit etwas mehrern Nachdencken zu unterſcheiden ſuchen.

Endlich iſt noch zuerinnern, daß dieſe 15 Bücher Euclidis, nicht etwa bloß vertiret oder nachgeſchrieben, ſondern wie die Operation und Beweiß des 10ten Buchs und fernerhin in ſpecie

 zeigen

zeigen wird, vielmehr mit eigener Arbeit verſehen worden, es wird alſo die Zeit dargeben, ob es dismahl recht oder nicht recht getroffen habe. Solte ja einigen nach einer weit äufftigeren Erklärung verlangen, ſo wäre dieſerwegen vielleicht künfftig noch wohl Rath zufinden, indeſſen Vale.

Einige Erklärung von der *Algebra*.

DIe Welt iſt gewohnet über einige, ob ſchon an ſich ſelbſt untadelhaffte Sachen, dennoch ihre wunderlichen Vorurtheile zu machen, und dis trifft gemeiniglich die Algebra guten Theils auch mit. Denn vieles ſcheinet etlichen Unwiſſenden übernatürlich zu ſeyn, welches hingegen durch der Algebra Beyhülffe ſo gleich etwas deutlicher betrachtet werden kan. Dahero wird auch ein der Algebra kundiger, verſchiedenes gantz anders beurtheilen, und vielerhand menſchlichen läppiſchen Einfällen nicht ſo gleich beypflichten können. Es werde nun die Algebra angeſehen wie es auch immer ſeyn möge, ſo bleibt doch gewiß! daß deren Nutz gantz unvergleichlich und unausſprechlich. Wolte GOtt! daß alle Menſchen auf der Welt nur die eine allgemeine eintzige Regul der Algebra wohl behertzigten, und bey ſich ſtatt finden lieſſen, nehmlich: **Das Wahre oder die Wahrheit zu ſuchen,** es würde ohnfehlbahr vielen Zwiſtigkeiten hierdurch geſteuret, auch alle menſchliche Arbeit auf

der Welt, weit erträglicher ſeyn, und gemachet werden.

Und alſo kan inſonderheit der jenige, welcher etwas réeles in der Mathematic zu verrichten geſonnen, der Algebra keinesweges dabey entrathen, denn ohne deren Erkäntnüs würde man ſo zu ſagen, des mehrern nur in finſtern herum tappen, und ſich mit vielen unnöthigen Memoriren und Speculiren plagen müſſen, welches alles hingegen die Algebra auf eins verhindert oder aufhebet. Zum Ex. Wenn bey der Arithmetica gewiſſe Regeln formiret werden, wie etwa in der Regula Detri, Regula Quinque, Regula Societatis, Alligation. Falſi &c. zu procediren ſey. So braucht gegentheils ein Algebraiſt dieſer Reguln keine zu memoriren, weiln der Zahlen Natur, ihme ſo fort auf eine eintzige allgemeine Regul, womit er in allen und ieden ſo fort gantz kurtz und gewiß procediren könne, anweiſet.

Dahero will eben nicht weitläufftig anführen, was ſelbige bey andern mathematiſchen Diſciplinen, der Geometria, Stereometria, Mechanica Statica, Optica Aſtronomia Geographia &c. auszurichten vermag, Indem bey allen Zweifelhafften, und dem Sinn offt ſchwer fallenden Reſolutionen, die Algebra gemeiniglich ein allgemeiner Schiedsmann ſeyn, und dem ohnfehlbaren Ausſpruch dargeben muß, Die Erfahrung lehret ſolches allzuſehr, waß groſſe Mühe und Verdrüßlichkeit derjenige überhoben ſey, wel-

cher über ein vorgeſtelltes Deſſein projectirende, ſo gleich das wahrhaffte davon ſich imprimiren, und in rechten Valor auch männiglich alſo vollgültig wiederum darſtellen kan. Man könte faſt ſagen, daß derer Vorfahren beſondere zeitliche Glückſeeligkeit in vielerhand Wege nicht wenig hierauf gegründet geweſen.

Und ob wohl einige der Meinung, daß die Coſſ oder Algebra, ſo gar alt nicht, und die Italiäner ſelbige von einem Araber der Geber geheiſſen, (und wovon das Wort Algebra herſtamme,) empfangen, und dann ſolche de la coſa (oder kürtzer Coſſ nennende) ferner in Teutſchland ſollen transferiret haben. So findet ſich doch, daß in des Euclidis und Archimedis Schrifften eine durchgehende Coſſ oder Algebra enthalten.

Dem Begriff der Algebra nun etwas leichter zu machen, finde dienlich einige Betrachtungen voran zu ſtellen. Als:

Die 1. Betrachtung.

Was vor Wiſſenſchafft oder Käntnüs derjenige, welcher die Algebra exerciren will, vorhero haben müſſe.

Gleich wie es ungereimt wäre, wenn einer, der zuvor wenig oder nichts im Rechnen verſtünde, ſo fort der Algebra ſich bedienen, und hierdurch Rechnen zu lernen unterſtehen wolte. Alſo iſt wenigſtens vorhero nachfolgendes zu wiſſen nöthig, nehmlich:

1) Die

1) Die 5. Species und Regula Detri gantzer und gebrochener Zahlen. Die Arithmetiſche und Geometriſche Progreſſion. Die Extraction der Qvadrat- und Cubic-Wurtzel. Und ob wohl die Reduction, Regula Detri Inverſa, Zinß-Rechnung, Regula Societatis, Falſi &c. hierbey nicht nöthig ſcheinen, ſo iſt es doch an dem, daß ſolcher Rechnungs-Arten Ubung, umb hierdurch der Zahlen Natur immer mehr und mehr beſſer kennen zu lernen, ſo dann bey Exercirung der Algebra, eine ſehr groſſe Beyhülffe abgeben.

2) Hierauf wäre die Geometria und Stereometria mit vorzunehmen, auch ſucceſſive die Neun erſten Bücher Euclidis, ſo weit man langen könte, mit durch zu machen.

3) Da mittlerweil der rational Algebræ, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, Reductio, Abbreviatio, und Reſolutio, allenfalls dis letztere, auch nur die qvadratiſchen Vergleichungen mit zu exerciren.

4) So dann könte die irrational-Algebra, auch herbey genommen, und zugleich das Zehende Buch Euclidis mit durch gemachet werden, als wodurch man endlich

5) Die irrational Quantitæten, Linien und Cörper, beſonders die binomia und reſidua, auch alle übrige Bücher Euclidis vollends biß ans Ende zu reſolviren Anleitung findet.

Die

Die 2. Betrachtung.

Daß die Algebra zu exerciren oder zu erlernen nicht unbegreifflich ſey.

Die Algebra zu erlernen iſt ſo gar unbegreifflich nicht, als etwa ſelbige von einigen angeſehen, oder geurtheilet wird, ſintemahln ihre Reguln oder Præcepta, gantz nichts tieffſinniges oder unverſtändliches hegen, vielmehr lediglich auf der Zahlen Natur gegründet, und dahero ein ieder mit etwas genauer Betrachtung, ſich leicht ſelbſt helffen und ſolche formiren kan. Beſonders iſt dißfalls dabey ein groſſer Vortheil, daß wenn ja etwa dem Gedächtnüß eine Regul oder Operation entfallen, man ſich ſo fort wieder in ſteggreiff finden, und die Regul ſelbſt herzuſtellen vermag. Zum Ex. Es wolte einer addiren 3 R + 6. zu 5 R — 2. hätte aber die Regul wie mit + und — hiebey zu operiren, gäntzlich vergeſſen. Hier darff man alſo nur etwas anders, dem Sinn leicht begreiffliches, erwehlen, und natürlicher Weiſe, oder nach der geſunden Vernunfft procediren und addiren, ſo wird die Regul zu formiren ſich gleich ſelbſt zeigen. Und alſo nehme man, ſtatt obiger beyden Poſten, dafür 3 ℔ + 6 Lot und 5 ℔ — 2 Lot, diß beydes zuſammen addirt, giebt erſtlich 8 lb. Da nun bey der erſten Poſt + 6 Lot oder 6 Lot drüber, bey der andern Poſt aber — 2 Lot, oder 2 Lot zu wenig, ſo folgt natürlicher Weiſe, daß wenn die 2. manquirende Lot, von denen 6. übrigen

gen Loten erſetzet werden, daß noch 4. Lot id eſt +4 Lot bleiben, und alſo 8 Pfund + 4 Lot die Summa ſey. Gleicher Geſtalt 3 R + 6 zu 5 R — 2 addirt, muß ebenfalls 8 R + 4 hervor bringen. Woraus nun leicht die Regul wegen + und — zu formiren, nemlich: Wenn bey der algebraiſchen Addition + 6 und — 2 zuſammen addiret werden ſoll, man nicht addiren, ſondern vielmehr 2 von 6 ſubtrahiren, und zum Reſt 4 das Zeichen + nehmen, oder vorſetzen, alſo + 4 hervor bringen müße. Wie könte nun deutlicher oder Vernunfft-mäßiger gerechnet werden. Dahero iſt die Algebra gantz keine ſchwere oder unbegreiffliche, vielmehr eine der natürlichſten und verſtändlichſten Rechnung.

Die 3. Betrachtung.

Was eigentlich denen Anfahenden die Algebra, ſchwer und dunckel mache.

Hier wären zwar gar viele Urſachen anzuführen. Eine der wichtigſten oder die vornehmſte iſt wohl die gleich Anfangs ins Geſicht fallende Characteres und Zeichen, die einem Incipienten in Moment, zumahl bey der Signatur derer irrational - Quantitæten gantz ungewöhnlich und unbegreifflich erſcheinen, wodurch einige Unwiſſende Anlaß nehmen könten, als wären hierunter verbotene oder gar Zauber-Künſte verborgen. Dahero kan es nicht fehlen, daß derjenige, welcher weder Algebraiſche noch Geometriſche Käntnüs, von ohngefehr einige algebraiſche Cha-

Characteres und Zeichen zu Geſichte bekömmt, bey nahe gar einigen Abſcheu darüber empfähet, und ſo lang dabey verharret, biß er auf dem rechten Weg geführet oder geleitet wird. Es wäre zwar gar wohl möglich, die Algebraiſche Rechnungen, auch ſonder dergleichen Character und Zeichen zu abſolviren, iedoch aber vielleicht eben ſo viel, als ob man an ſtatt einen Weg von 100. Schritten zu gehen, dafür lieber etliche 100. Schritt zu wandeln erwehlen wolte. Die Menſchen ſeynd faſt durchgehend beflieſſen, das Bret gerne zu bohren, wo es am dinneſten iſt, welches auch auf gewiſſe maße nicht unrecht, nur aber wollen ſich einige Sorten Arbeit, gleich als die Algebra iſt, ſo ſchlecht hin nicht tractiren laſſen. Dahero auch nach der gewöhnlichen Obſervanz, eine Sache ob ſelbige gleich alt, nur aber gut, ſonder erhebliche Urſache nicht ſoll verändert, vielmehr biß etwas beſſers gefunden, lieber beybehalten werden. Es kömmt in allen Thun und Weſen, nur auf die Käntnüs oder Wiſſenſchafft an. Denn wie man vor Reichsthaler kan ſetzen Rthl. vor Groſchen Gr. vor Pfund lb. und ſo fort: Alſo kan auch in der Algebra vor Radix R, oder $\surd$. vor Quadrat oder Zenſus Z, vor Cubus C, vor Cubizenſus CZ, vor plus + vor minus — vor gleich = und ſo ferner geſchrieben werden. Nur daß gar vielen und faſt männiglich bekandt, was Reichsthaler oder Rthl. hingegen gar wenigen was Zenſus oder Z. ſey.

Die

Die 4. Betrachtung.
Wie vielerhand die Algebra.

Weyland hat man vornehmlich nur zweyerley, als die Rational- und Irrational-Zahlen dabey obſerviret, das iſt: Die Rational- und Irrational-Algebra. Zu dieſen Zeiten aber iſt die Eintheilung höher angeſtiegen, und alſo hat man zu betrachten

Rational-Algebra,
Irrational-Algebra.

Die Algebra derer binomiorum & reſiduorum.

Algebra Numeroſa,
Algebra Specioſa.

Will mans kurtz faſſen, ſo bleibt die Eintheilung bey dem alten, nemlich: Rational und irrational, ſintemahl die binomia und reſidua auch irrational, und alſo gar füglich auf eins der Irrational-Algebra mit beyzufügen.

Sonſt ſagt man, daß Algebra Numeroſa durch Zahlen, Algebra Specioſa hingegen durch Buchſtaben abgehandelt werde.

Die 5. Betrachtung.
Von denen Charactern, ſo bey der Algebra gebrauchet werden.

Es kommt bey der Algebra zugleich hauptſächlich mit auf die rechte Känntnüs derer Character

und Zeichen an, weiln dieſe einem Incipienten (gleich als durch vorhergehende 3te Betrachtung guten Theils erwehnet worden,) Anfangs gantz unbegreifflich ſcheinen, welches vielen ſich ſelbige recht zu imprimiren, nicht wenige Arbeit machet. Es ſeynd aber ſolche Character eben ſo gar unbegreifflich nicht, wenn erſtlich nur eine recht gründliche Ideè davon etabliret wird.

Dieſemnach hat man zu obſerviren bey der Algebra Numeroſa die gewöhnlichen Character R, Z, (oder Q.) C, ZZ, S1, ZC, S2, ZZZ, CC, ZS1, S3. ZZC &c. oder vollkömmlich, Radix, Zenſus (oder Qvadrat) Cubus, Zens de Zens &c.

Solche Character nun können vielerhand bedeuten, oder dafür angenommen werden. Alſo kan R. oder √. nemlich Radix oder die Wurtzel, als der Anfang oder Urſprung zu denen folgenden Charactern verſchiedenes gelten, zum Ex. eine gewiſſe Gröſſe, Qvantitæt oder Zahl.

Die Gröſſe einer Linie von 6. und mehr Elen lang, eine Qvantitæt Geld, von 100. 380. 1000. Thl. &c. Schlechthin eine Zahl von 12. $7\frac{1}{2}$. 200. in Summa ſo viel es ſey, wenig oder viel.

In was Gröſſe, Qvantitæt, Zahl oder Valor nun Radix iſt, gelten nach Geometriſcher Progreſſion oder Algebraiſchen Proportion, ſodann auch die fernern Characteres Z. (oder Q.) C. ZZ. &c.

Zum

Zum Ex. R. oder Radix, wäre eine Linie von 5. Ellen lang, ſo würde Z. (oder Q.) ein Quadrat oder 4eckichte recht wincklichte Fläche von 25. quadrirten Elen ſeyn. C. aber (das iſt Cubus,) wäre bey ſo geſtalten Sachen 125. Cubiſche Elen, nemlich: Ein Cubus, id eſt Würffel oder Corpus regulare, davon R. oder iede Seite 5. Elen lang. Zz. hielte dieſemnach 625. quadrirte aus quadrirten Elen, welches eine ſolche Fläche, da R. 5. Elen quadrirt 25. Elen giebet, und dieſe 25. Elen vor die Seite eines Quadrats genommen werden, ſo an quadrirten Inhalt 625. quadrirte Elen halten wird.

Oder aber kan ſolches auch ein Corpus eines ZZ. abgeben.

Bey der Algebra Specioſa

Seynd die Characteres an ſtatt R. Z. C. Zz. &c. dafür a, aa, aaa, aaaa, oder aber a, a^2; a^3; a^4;

Alſo bedeutet a Radix oder R, aa oder a^2 iſt Z. oder Q. aaa oder a^3 iſt C.

Bey der Irrational-Algebra

Iſt über die allbereit erwehnten, nur noch ein eintziger Character zu obſerviren, nemlich $\surd$; welches (wenn kein anderer Character dabey befindlich,) ſchlechthin allezeit ſo viel bedeutet, daß man die Quadrat-Wurtzel extrahiren ſolle.

Zum Ex. $\sqrt{5}$. iſt oder bedeutet, daß man die Qvadrat-Wurtzel aus 5. extrahire, ſo beträgt $2.\frac{118}{1000}$ und etwas drüber.

Alſo iſt $\sqrt{21\frac{1}{3}} - 4$. gleich $\frac{6188}{10000}$ und ein wenig drüber.

Hingegen $\sqrt{C20}$. iſt ſo viel, daß die Cubic-Wurtzel aus 20. extrahiret werde, nehmlich $2\frac{714}{1000}$ und etwas drüber. $\sqrt{\sqrt{108}}$. oder $\sqrt{:\sqrt{108}}$. oder $\sqrt{zz\ 108}$. iſt $3\frac{2237}{10000}$ und ein wenig drüber.

$\sqrt{zc.100}$. thut $2\frac{154}{1000}$ und ſo fort weiter.

In übrigen wird derer Character Eigenſchafft, aus beygefügter Tabella etwas näher zu erſehen ſeyn.

Geo-

Geometriſche Progreſſiones.		Exponenten.	Coſſiſche Zeichen.	
1	1	- -	- -	abſolut-Zahl
2	3	1	R.	Radix
4	9	2	Z.	Zenſus
8	27	3	C.	Cubus
16	81	4	Zz.	Zenſizenſus
32	243	5	S.	Surſolidus
64	729	6	Cz.	Cubizenſus
128	2187	7	S2.	Surſolidus 2.
256	6561	8	Zzz.	Zenſizenſicenſꝰ
512	19683	9	Cc.	Cubicubus
1024	59049	10	Sz.	Surſolidizenſus
2048	177147	11	S3.	Surſolidus 3.
4096	531441	12	Zzc.	Zenſizenſicubus
8192	1594323	13	S4.	Surſolidus 4.
16384	4782969	14	Sz2.	Surſolidizenſ. 2

Die 6. Betrachtung.

Von denen algebraiſchen Zeichen.

Derer Algebraiſchen Zeichen ſeynd ſo gar viel nicht, die nöthigſten und gebräuchlichſten beſtehen in dieſen dreyen +, — und ═

Nemlich: + plus oder mehr.
— minus oder weniger.
═ gleich.

Dahero wenn ſtehet 3 Z + 5. iſt ſolches 3. Zenſus und noch 5. dazu oder mehr.

Item 2 Z — 3. iſt 2. Zenſus weniger 3. ideſt 2. Zenſus woran 3. mangeln. Das Zeichen $=$ ſo gleich bedeutet, wird auch alſo geſchrieben, æq. g. &c.

Fernere Zeichen, als womit gröſſer, dann auch kleiner, item, commenſurabel und incommenſurabel, ſammt anderen mehreren ſigniret wird, ſeynd nicht durchgehend gebräuchlich, und können bey denen Auctoribus, welcher Art ſich ein ieder gebrauchet, gar leicht erkandt werden.

Und giebt, allzuviel Zeichen und Abbreviaturen zu gebrauchen, eben keinen Vortheil, ſondern offt nur mehr Verhinderung, ſintemahln oberwehnte drey $+$ — und $=$ ſchon zulänglich, in übrigen behält ohnediß ein ieder die Freyheit, ſich deren nach Gefallen mehr oder weniger zu bedienen.

Die 7. Betrachtung.

Von denen binomiis & reſiduis.

Was ein binomium und reſiduum ſey, kan nicht beſſer als in den Zehenden Buch Euclidis bekandt werden, als woſelbſt gar ausführlich und fundamental davon gehandelt wird.

Ein binomium iſt eigentlich eine Gröſſe oder Linie, in 2. verſchiedenen Theilen beſtehende, ſo mit dem Zeichen $+$ connectiret werden, und wenigſt der eine Theil davon allezeit irrational ſeyn muß. Zum Ex. $8 + \sqrt{28}$ iſt ein binomi-

nomium, aus zwey Theilen 8. ſo rational, und $\sqrt{28}$. ſo irrational, zuſammen geſetzet.

Ein reſiduum hingegen iſt ein Reſt oder übrig bleibendes Theil von einer Größe oder Linie alſo: Daß entweder das Gantze, oder der wegnehmende Theil irrational ſeyn müße. Zum Ex. eine Linie, ſo rational 8. lang, davon einen irrational Theil $\sqrt{28}$. weggenommen, bleibt übrig das reſiduum $8. - \sqrt{28}$.

Alſo auch eine Linie, ſo irrational $\sqrt{180}$. davon einen rational-Theil 10. weggenommen, bleibt übrig das reſiduum $\sqrt{180} - 10$. item, eine Linie ſo irrational $\sqrt{45}$. davon einen irrational-Theil $\sqrt{18}$. weggenommen, bleibt übrig das reſiduum $\sqrt{45} - \sqrt{18}$. und alſo auch mit andern.

Hierauff nun, was nemlich in dieſen 7. Betrachtungen ietzt vorgeſtellet worden, iſt die Algebra guten Theils gegründet. Dahero dann bey deſſen Bekandtmachung und guter Obſervanz, ſich das ferner folgende (wie Algebraicè, zu addiren, ſubtrahiren, multipliciren, dividiren, extrahiren und zu reſolviren,) auch deſto leichter wird abhandeln laſſen.

Rational-Algebra, Numeroſa.

Numeratio.

$3Z + 4R - 6.$ Iſt 3 Zenſus, plus 4. Radices. minus 6.

Additio.

Erſte Regul.

Bey gleichen Zeichen, wird ordentlich addiret, und bleiben die Zeichen unverändert.

$3Z + 5R - 2$	Zur Proba	$= 20$
$2Z + 3R - 6$	gelte 1 R. 2.	$= 8$
$5Z + 8R - 8$	ſo iſt	$= 28$

Zweyte Regul.

Bey ungleichen Zeichen, wird ſubtrahiret, und allezeit der gröſten Quantitæt ihr Zeichen behalten.

$2Z + 4R - 3$	Zum probiren	$= 27$
$1Z - 5R + 8$	gelte 1 R $= 3$	$= 2$
$3Z - 1R + 5$	ſo iſt	$= 29$

Sub-

Subtractio.

Erſte Regul.

Bey gleichen Zeichen (wenn die obere Quantitæt oder Zahl gröſſer als die untere) wird ordentlich ſubtrahiret, und bleiben die Zeichen unverändert.

$3Z - 4R + 8$	1 R. gelte	$= 40$
$1Z - 1R + 2$	$= 4.$	$= 14$
$2Z - 3R + 6$		$= 26$

Zweyte Regul.

Bey gleichen Zeichen (wenn die untere Quantitæt oder Zahl gröſſer als die obere) wird auch ſubtrahirt, hingegen aber werden die Zeichen verändert.

$4Z + 2R - 3$	1 R gelte	$= 17.$
$1Z + 3R - 8$	2	$= 2.$
$3Z - 1R + 5$		$= 15.$

Dritte Regul.

Bey ungleichen Zeichen, wird allezeit (ohne Unterſcheid) addirt, und der obern Quantitæt oder Zahl, ihr Zeichen behalten.

$2Z + 3R - 6$	1 R ſey 3.	$= 21.$
$1Z - 2R + 2$		$= 5.$
$1Z + 5R - 8$		$= 16.$

Multiplicatio.

Erſte Regul.

Algebraiſche Quantitæten oder Zahlen, mit gemeinen Zahlen multipliciret, bleiben die Character und Zeichen unverändert.

1 Z — 2 R + 3 mit 5. multiplicirt.

f. 5 Z -- 10 R + 15.

Dis zu probiren ſey 1 R = 2.

Dahero iſt 1 Z — 2 R + 3 gleich 3. dis mit 5. multiplic. giebt 15. ſo gleich 5 Z — 10 R + 15.

Zweyte Regul.

Wenn Algebraiſche Zahlen mit Algebraiſchen Zahlen multiplicirt werden, ſo vermehrt ſich der Character (nach der Algebraiſchen Character Ordnung) addirt, als:

2 R mit 3 R mult.

f. 6 Z.

Nota, weil R in der Ordnung der 1. Character, dahero hier 1 und 1 zuſammen addirt, giebt 2. dem Character der zweyten Ordnung, nemlich Z.

Proba.

1 R. gelte 2. ſo iſt 2 R = 4 und 3 R = 6

Dahero 4. mit 6 mult. bringt 24. ſo = 6 Z.

Alſo

Alſo multiplicire

3R mit 2Z   3C mit 4C.

f. 6C.   f. 12ZC.

1Z + 2R − 3 mit 2R.

f. 2C + 4Z − 6R.

Dritte Regul.

Gleiche Zeichen + mit + bringt +
oder − mit − auch +

Hingegen

Ungleiche Zeichen + mit − bringt −

Nota, dieſe dritte Regul iſt beſonders zu mercken, und wohl zu exerciren, als welche bey der Algebraiſchen Multiplication am meiſten vorfället, oder die meiſte Arbeit iſt.

Alſo multiplicire

2R + 4 mit 1R + 3

2Z + 4R
    + 6R + 12

f. 2Z + 10R + 12.

*Nota, wo einer Quantitæt kein Zeichen vorſtehet, wird allezeit + verſtanden, alſo hier bey 2R und 1R, + 2R und + 1R

Proba.

1 R ſey = 2. ſo iſt 2R + 4 gleich 8. und 1R + 3 gleich 5. Dahero 8 mit 5 mult. bringt 40. welches gleich 2Z + 10R + 12.

Denn

Denn 2 Z thut 8.
$+$ 10 R - - 20
$+$ 12 - - 12
alſo gleich 40.

item, multiplicire

$$\begin{array}{l} 1Z - 3R \text{ mit } 2R + 4 \\ \hline 2C - 6Z \\ \quad + 4Z - 12R \\ \hline \text{f. } 2C - 2Z - 12R. \end{array}$$

item, multiplicire

$$\begin{array}{l} 1Z - 3 \quad \text{ mit } 2R + 4. \\ \hline 2C \quad - 6R \\ \quad + 4Z \quad - 12 \\ \hline \text{f. } 2C + 4Z - 6R - 12. \end{array}$$

Diviſio.

Erſte Regul.

Wenn algebraiſche Zahlen, mit gemeinen Zahlen abdividiret werden, ſo bleiben die Character und Zeichen unverändert.

$$\begin{array}{l} 4Z + 6R - 8. \text{ dividire mit 2. oder in 2.} \\ \hline \text{f. } 2Z + 6R - 4. \quad \text{(Theile.} \end{array}$$

Zweyte Regul.

Algebraiſche Zahlen mit algebraiſchen Zahlen abdividiret, vermindert ſich der Character (nach

der algebraiſchen Character-Ordnung) ſubtrahiret. Als

$\frac{6Z}{f.\ 2R.}$ mit 3 R abdividirt.

Nota weil Z in der Ordnung 2. mit R (ſo in der Ordnung 1) dividirt wird. Dahero 1 von 2 ſubtrahirt, reſtirt 1. vor die Ordnung oder Character R. ſo zum facit hervor kommet.

Dritte Regul.

Der Algebra gemeinſte und beqvemſte Art iſt. Nur dem Diviſorem unter die theilende Zahl oder Qvantitæt zu ſchreiben, nehmlich

Dividire 12 durch 3 R abe. Fac. $\frac{12}{3R.}$

item, div. 3 Z mit 2 R + 5. Fac. $\frac{3Z}{2R + 5}$

De proportionibus.

$$3R \text{ giebt } 7. \text{ was } 6R - 3$$
$$42R - 21$$
$$\text{Fac. } 14R - 7$$

Reductio.

$$\frac{8R + 2Z}{2Z + 8R} = \frac{16R - 6}{16R - 6}$$
$$-8R$$
$$2Z = 8R - 6$$

Nota,

Nota, wenn etwas von einer Qvantitæt weggenommen, und der andern zugeſetzt wird, ſo verändert ſich das Zeichen.

Abbreviatio.

$$\frac{2Z = 8R - 6}{1Z = 4R - 3}$$

Reſolutio.

1 Z	=	4 R — 3		
	die Helffte	2	qvadrire	
	thut	4.		
hiervon obige	—	3	ſubtrahirt.	
	reſt	1.	hieraus rad. □	
	giebt	1		1
+ auch —	obige Helffte	2		2
1 R	=	3	oder auch	1.

Irrational-Algebra.

Numeroſa.

Von denen irrational oder ſurdiſchen Zahlen.

Hierbey ſeynd über vorhergehende, noch einige andere Characteres zu obſerviren.

Vornehmlich der folgende Character.

$\sqrt{}$ bedeutet ſo viel, daß Radix-Quadrat, oder die Qvadrat-Wurtzel ſoll extrahiret werden.

$\sqrt{}$C. bedeutet, Rad. Cubica zu extrahiren.

$\sqrt{}$ZZ. oder $\sqrt{}\sqrt{}$. Radix Zenſizenſica zu extrahiren, &c.

Numeratio.

$\sqrt{3}$. Iſt eine Gröſſe oder Qvantität der Quadrat-Wurtzel aus 3 nehmlich $1.\frac{732}{1000}$ und ein wenig drüber.

$\sqrt{\sqrt{128}}$. Iſt Radix Zenſizenſica oder 2 mahl die Qvadrat-Wurtzel aus 128 nehmlich $3.\frac{363}{1000}$ und etwas drüber.

$\sqrt{12} + 3$. Iſt Rad. Qvadrat aus 12 extrahirt, und ſo dann 3 dazu addirt, nehmlich $6.\frac{4641}{10000}$ und etwas drüber.

$7 - \sqrt{48}$. Iſt bey nahe $\frac{718}{10000}$

Nota, ehe und bevor man weiter gehet, iſt noch zu wiſſen nöthig.

Daß derer Irrational-Zahlen vornehmlich zweyerley Arten, als: commenſurable und incommenſurable das iſt ermeßliche und unermeßliche. Die ermeßlichen werden auch communicantes genennet, wovon bald näherer Bericht und Erklärung folgen wird.

Additio.

Zum Erſten.

Incommenſurable Zahlen, werden nur mit Connectirung + addiret.

Addire $\sqrt{3}$ zu $\sqrt{5}$. Facit $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Addire $\sqrt{7}$ zu 2. Facit $\sqrt{7} + 2$.

Zum Andern.

Commenſurable Zahlen oder Communicantes werden folgender maſſen addiret.

Addire $\sqrt{12}$ zu $\sqrt{27}$. Facit $\sqrt{75}$.

Die Menſur iſt 3.

$\sqrt{12} - 4$ rad. 2 } addirt.
$\sqrt{27} - 9$ rad. 3

5 dis quadrirt.

25 mit der Menſur (3. mult.

Fac. $\sqrt{75}$

Nota, mit der Menſur werden die commenſurablen Qvantitäten, in Qvadrat-Zahlen abgetheilet.

Subtractio.

Zum Erſten.

Incommenſurable Qvantitæten werden, mit dem Zeichen — ſubtrahirt, als:

Von $\sqrt{5}$ ziehe ab $\sqrt{3}$. Facit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Von $\sqrt{7}$ ziehe ab 2. Facit $\sqrt{7} - 2$.

Zum

Zum Andern.

Commenſurable Qvantitæten werden folgender maßen ſubtrahiret.

Subtrahire √27 von √75. Fac. Reſt √12.

Die Menſur iſt 3.	√75 — 25	rad. 5	ſubtrah.
	√27 — 9	rad. 3	
		2	dis quadrirt.
		4	mit der Menſ. 3. (mult.

Fac. √12.

Nota, die Procedur iſt vice verſa vorhergehender Addition conform.

Multiplicatio.

Beyn Multipliciren gilt es gleich viel, ob die Qvantitæten commenſurabel oder incommenſurabel ſeyn. Nur iſt dabey zu mercken, daß allezeit gleich mit gleich multipliciret werde, die Procedur wird dieſes näher oder deutlicher zeigen.

Multiplicire √5 mit √3. Fac. √15.

Item √10 mit √4. Fac. √40.

Item √8 mit √18. Fac. √144 oder 12.

Nota, beyn letzten Exempel iſt √8 und √18 commenſurabel, und kan dahero auch alſo multipliciret werden.

Menſur $\sqrt{8}$ - - 4 rad. 2 } multipl.
iſt 2. $\sqrt{18}$ - - 9 rad. 3 }

6 mit der Menſ. 2.

Fac. 12. (mult.

Item multiplicire $\sqrt{5}$ mit 2. Fac. $\sqrt{20}$.

Nota, hier wird 2 erſtlich zu $\sqrt{4}$ gemacht.

Item mult. 6 mit $\sqrt{3}$. Fac. $\sqrt{108}$.

Hier mache aus 6 $\sqrt{36}$.

Diviſio.

Es mögen die Qvantitæten commenſurabel oder incommenſurabel ſeyn, ſo procedire wie bey der Multiplication, hier dagegen nur rückwerts, als:

Dividire $\sqrt{15}$ durch $\sqrt{3}$. Fac. $\sqrt{5}$.

Item, $\sqrt{40}$ durch $\sqrt{4}$. Fac. $\sqrt{10}$.

Ferner

12 durch $\sqrt{8}$. Facit $\sqrt{18}$.

Hier mache 12 zu $\sqrt{144}$.

Item dividire $\sqrt{20}$ durch 2. Fac. $\sqrt{5}$.

Item $\sqrt{108}$ durch $\sqrt{3}$. Fac. $\sqrt{36}$ oder 6.

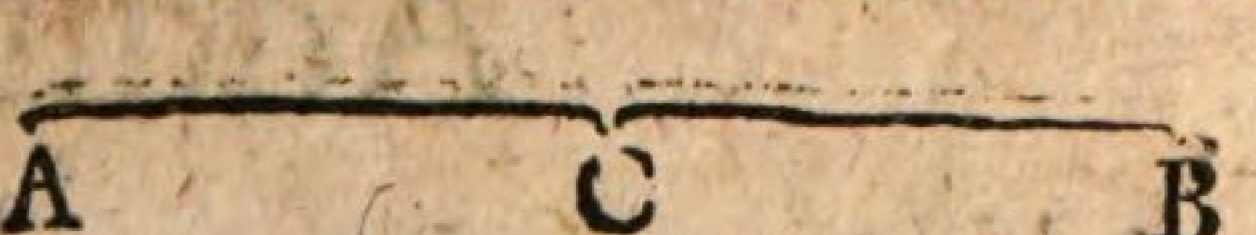
Irrational- oder *Surdiſche Extraction.*

Diß erfordert keiner beſondern Arbeit, als: Extrahire die Quadrat-Wurtzel aus 7. Fac. $\sqrt{7}$. Item aus 8. Fac. $\sqrt{8}$ oder $2\frac{828}{1000}$. und etwas (drüber.

Item, extrahire rad. quadratam aus $\sqrt{108}$. Fac. $\sqrt{\sqrt{108}}$ oder $\sqrt{10.\frac{3923}{10000}}$. gleich $3.\frac{223}{1000}$. und noch etwas drüber.

Algebra de Binomiis & Reſiduis.

Binomia und Reſidua ſeynd Quantitäten oder Linien, ſo aus 2en Theilen oder Nahmen beſtehen.



Zum Exempel, die

Linie A B wäre in C alſo getheilet, daß der eine Theil A C 6. rational, der andere Theil C B aber $\sqrt{20}$ irrational wäre.

So ſagt man, daß die Linie A B $6 + \sqrt{20}$. ein Binomium ſey, nehmlich: eine Linie, welche aus zweyen wiederwärtigen Theilen oder Nahmen 6 und $\sqrt{20}$ beſtehe, und nicht allein

ſolche 2 Theile gegen einander, ſondern auch die gantze Linie A B incommenſurabel, oder in Länge unermeßlich, nehmlich: Die durch gemeine Zahlen nicht accurat anzugeben iſt.

Dergleichen Binomia mit ihren Reſiduis werden in folgenden 10ten Buch Euclidis vornehmlich 6erley Arten ausführlich beſchrieben, erläutert und demonſtriret, dahero man auch in ſolchen 10ten Buch, ſonder derer Binomiorum und Reſiduorum Berechnung gantz und gar nicht fortzukommen vermag.

Es ſey dahero

Numeratio.

$6 + \sqrt{20}$ ein Binomium welches gleich $10.\frac{4721}{10000}$ und etwas weniges noch drüber.

$6 - \sqrt{20}$ iſt deſſen Reſiduum, ſo bey nahe $1\frac{5279}{10000}$.

Additio.

Addire

$\sqrt{3} + 5$	$16 - \sqrt{45}$
$\sqrt{12} + 3$	$5 + \sqrt{20}$
Fac. $\sqrt{27} + 8$.	Fac. $21 - \sqrt{5}$

Item addire

$\sqrt{18} + \sqrt{12}$	$\sqrt{12} - 2$
$\sqrt{18} + \sqrt{27}$	$\sqrt{48} + 2$
Fac. $\sqrt{72} + \sqrt{75}$	Fac. $\sqrt{108}$.

Item

Item

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{20}-\sqrt{7} \\ \sqrt{7}+\sqrt{7} \\ \hline \end{array}$$

Fac. 9. Fac. $\sqrt{20}+\sqrt{7}$.

Item, addire $\sqrt{76}$ zu $10-\sqrt{19}$. Fac. $10+\sqrt{19}$.

$$\left.\begin{array}{r} +\sqrt{76} \\ 10-\sqrt{19} \end{array}\right\} \text{ſubtrahire}$$

$10+\sqrt{19}$. [19. Prop. 10.]

Item, addire

$$\begin{array}{r} 32+\sqrt{384} \\ 32-\sqrt{384} \\ \hline \end{array}$$

Fac. 64. [34. 10.]

Subtractio.

Subtrahire

$$\begin{array}{lr} \text{von} & \sqrt{27}+8 \\ \text{ſubtr.} & \sqrt{12}+3 \\ \hline \text{Reſt} & \sqrt{3}+5 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \text{von} & 21-\sqrt{5} \\ \text{ſubtr.} & 5+\sqrt{20} \\ \hline \text{Reſt} & 16-\sqrt{45} \end{array} \Big\} \text{add.}$$

Item:

$$\begin{array}{lr} \text{von} & \sqrt{72}+\sqrt{75} \\ \text{ſubtr.} & \sqrt{18}+\sqrt{27} \\ \hline \text{Reſt} & \sqrt{18}+\sqrt{12} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \text{von} & \sqrt{108} \\ \text{ſubtr.} & \sqrt{48}+2 \\ \hline \text{Reſt} & \sqrt{12}-2 \end{array}$$

Item:

von 9
ſubtr. $2 - \sqrt{5}$

Reſt $7 + \sqrt{5}$

von $\sqrt{20} + \sqrt{7}$
ſubtr. $\sqrt{7} + \sqrt{7}$

Reſt $\sqrt{20} - \sqrt{7}$

Item:

von $10 + \sqrt{19}$
ſubtr. $10 - \sqrt{19}$

Reſt $\sqrt{76}$

von 64
ſubtr. $32 - \sqrt{384}$

Reſt $32 + \sqrt{384}$

Multiplicatio.

$8 + \sqrt{5}$ mit 2. (hier mache 2. zu $\sqrt{4}$)
Fac. $16 + \sqrt{20}$.

$\sqrt{18} - \sqrt{2}$ mit 3. (mache 3. zu $\sqrt{9}$)
Fac. $\sqrt{162} - \sqrt{18}$.

$\sqrt{\sqrt{72}} + \sqrt{\sqrt{\tfrac{2}{9}}}$ mit $\sqrt{\sqrt{3\tfrac{5}{9}}}$
F. $\sqrt{\sqrt{256}} + \sqrt{\sqrt{\tfrac{64}{81}}}$ gleich $\sqrt{16} + \sqrt{\tfrac{8}{9}}$ [44.10]

Divi-

Diviſio.

$16 + \sqrt{20}$ mit 2. abdivid. (mache 2 zu $\sqrt{4}$)

f. $8 + \sqrt{5}$.

$\sqrt{162} - \sqrt{18}$. mit 3. divid.

f. $\sqrt{18} - \sqrt{2}$.

$\sqrt{72} + \sqrt{6}$. mit $\sqrt{2}$. dividirt.

f. $\sqrt{36} + \sqrt{3}$. ſo gleich $6 + \sqrt{3}$.

$\sqrt{16} + \sqrt{\frac{8}{9}}$. durch $\sqrt{\sqrt{3\frac{5}{9}}}$. div.

f. $\sqrt{\sqrt{72}} + \sqrt{\sqrt{\frac{2}{9}}}$.

Nota, hier mache $\sqrt{16}$ zu $\sqrt{\sqrt{256}}$ und $\sqrt{\frac{8}{9}}$ zu $\sqrt{\sqrt{\frac{64}{81}}}$.

Item, dividire

$\sqrt{}: 6 - \sqrt{10}$. mit 2. dlvid. oder halbirt.

f. $\sqrt{}: 1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}$.

Hier mache 2 zu $\sqrt{4}$ und $\sqrt{\sqrt{16}}$. damit dividire beyde Theile. [46. 10.]

Item,

$\sqrt{}: \sqrt{18} - \sqrt{12}$. in 2. Theil. divid.

f. $\sqrt{}: \sqrt{1\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{3}{4}}$. [48. 10.]

De proportionibus.

wie	zu	alſo
$10+\sqrt{12}$	$5+\sqrt{3}$	$18-\sqrt{6}$.
wie 2	zu 1	alſo $9-\sqrt{1\frac{1}{2}}$.

$\sqrt{18}$ giebt $8-\sqrt{5}$ was 9

$\sqrt{81}$

Fac. $\sqrt{288}-\sqrt{22\frac{1}{2}}$.

Item

wie DF	zu AC	alſo DE zu AB
$\sqrt{:32+\sqrt{384}}$.	$\sqrt{:8+\sqrt{24}}$.	$\sqrt{:32-\sqrt{384}}$

kommt $\sqrt{:8-\sqrt{24}}$. vor AB (106.10)

Binomia zu quadriren.

1. $4+\sqrt{6}$. mit $4+\sqrt{6}$.

$16+\sqrt{96}$

$+\ 6+\sqrt{96}.\ +6$ (dies $+6$ trage vor.)

Fac. $22+\sqrt{184}$. (34. 10.)

2. Item, quadrire $\sqrt{\sqrt{13\frac{1}{2}}} + \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{2}}}$. Facit $\sqrt{24} + \sqrt{18}$.

$\sqrt{\sqrt{13\frac{1}{2}}} + \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{2}}}$ mit $\sqrt{\sqrt{13\frac{1}{2}}} + \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{2}}}$

$\sqrt{13\frac{1}{2}} + \sqrt{4\frac{1}{2}}$.

$+ \sqrt{1\frac{1}{2}} + \sqrt{4\frac{1}{2}} + \sqrt{1\frac{1}{2}}$. (dis $1\frac{1}{2}$. trage vor.)

Fac. $\sqrt{24} + \sqrt{18}$. (35. 10.)

3. Item, quadrire $\sqrt{:6 + \sqrt{10}} + \sqrt{:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}$. Facit $7\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{5}{8}} + \sqrt{26}$.

$\sqrt{:6 + \sqrt{10}}$ mit $\sqrt{:6 + \sqrt{10}}$ bringt $6 + \sqrt{10}$.

$\sqrt{:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}$ mit $\sqrt{:6 + \sqrt{10}}$ bringt $\sqrt{6\frac{1}{2}}$

$\sqrt{:6 + \sqrt{10}}$ mit $\sqrt{:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}$ bringt $\sqrt{6\frac{1}{2}}$.

$\sqrt{:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}$ mit $\sqrt{:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}$ bringt $1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}$.

Dieſe 4. Poſten nun zuſammen addirt:

$6 + \sqrt{10}$ $\quad \sqrt{6\frac{1}{2}}$

$1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}$ $\quad \sqrt{6\frac{1}{2}}$

Fac. $7\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{5}{8}} + \sqrt{26}$. (46. 10.)

Nota, $\sqrt{:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}$ mit $\sqrt{:6 + \sqrt{10}}$. mult. (alſo.

$9 - \sqrt{22\frac{1}{2}}$.

$-2\frac{1}{2} + \sqrt{22\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{2}$.

$\sqrt{6\frac{1}{2}}$.

Derer binomiorum Qvadrat-Wurtzel zu extrahiren.

Extrahire die Qvadrat-Wurtzel aus $22 + \sqrt{384}$. Facit $4 + \sqrt{6}$.

Operatio.

	$22 + \sqrt{384}$	$4.$
Das □ von 4.	16. ſubtr.	$+ \sqrt{6}$
	6 alſo + 6.	$4 + \sqrt{6}$.

Nota, diß läſt ſich auff dergleichen Schlag nur practiciren, daß wenn ein Binomium mit ſich ſelbſt multipliciret worden, und iſt die Procedur aus ietzt vorgehenden 1. Ex. leicht zu erkennen.

Gleiche Beſchaffenheit hat es mit denen Reſiduis. In übrigen geſchiehet die Extraction folgender maßen.

Extrahire die Qvadrat-Wurtzel aus $1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}$.
Facit $\sqrt{:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}$.

Item, extr. die Qvadr. Wurtzel aus $6 + \sqrt{24}$.
Fac. $\sqrt{:6 + \sqrt{24}}$ [58. 10.]

Zur

Zur Ubung, auch wegen künfftig hin beyn 10. Buch Eucl. nöthig-ſcheinender Nachricht, finde die in ſolchen 10ten Buch Anfangs geſetzte 14. Anmerckungen, ſammt einigen Propoſitionen, ihre Berechnung hier vorzuſtellen nicht undienlich, ſondern vielmehr faſt nothwendig zu ſeyn.

2. Anmerckung.

AB $\sqrt{\sqrt{486}}$. mit BC $\sqrt{\sqrt{96}}$. mult.

giebt $\sqrt{\sqrt{46656}}$. ſo gleich $\sqrt{216}$. vor die Mittel-Fläche ABCD.

4. Anmerckung.

HI $\sqrt{\sqrt{108}}$. mit IK $\sqrt{\sqrt{12}}$. mult.

giebt $\sqrt{\sqrt{1296}}$ — $\sqrt{36} = 6$. vor das Rational-Rectangulum HIKL.

5. Anmerckung.

MN $\sqrt{\sqrt{96}}$. mit NO $\sqrt{\sqrt{6}}$. mult.

giebt $\sqrt{\sqrt{576}} = \sqrt{24}$. ein Rectang. Medium MNOP.

6. Anmerckung.

QR $\sqrt{:6+\sqrt{10}}$. mit RS $\sqrt{6-\sqrt{10}}$. mult.

$$36+\sqrt{360}$$
$$-10-\sqrt{360}-10.$$

Fac. $\sqrt{26}$. vor das Rect. Medium WS.

7. Anmerckung.

AB $\sqrt{:\sqrt{7\frac{1}{2}}+\sqrt{3\frac{1}{2}}}$. quadrirt.

giebt $\sqrt{7\frac{1}{2}}+\sqrt{3\frac{1}{2}}$. das Quadrat AE.

BC $\sqrt{:\sqrt{7\frac{1}{2}}-\sqrt{3\frac{1}{2}}}$. quadrirt.

giebt $\sqrt{7\frac{1}{2}}-\sqrt{3\frac{1}{2}}$. das Quadrat ED.

addire $\sqrt{7\frac{1}{2}}+\sqrt{3\frac{1}{2}}$. das Quadrat AE.

giebt $\sqrt{30}$. vor beyde Quadrata AE. und (ED.

Ferner

AB $\sqrt{:\sqrt{7\frac{1}{2}}+\sqrt{3\frac{1}{2}}}$. mit BC. $\sqrt{:\sqrt{7\frac{1}{2}}-\sqrt{3\frac{1}{2}}}$ (multipl.

$$7\frac{1}{2}+\sqrt{26\frac{1}{4}}.$$
$$-3\frac{1}{2}-\sqrt{26\frac{1}{4}}-3\frac{1}{2}.$$

$\sqrt{4} = 2.$ vor das Rational-Rect. (EC.

8. An-

8. Anmerckung.

FG $\sqrt{:}\sqrt{5}+\sqrt{2}$ quadrirt.
giebt $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ das Quadrat FI.
GH $\sqrt{:}\sqrt{5}-\sqrt{2}$ quadrirt.
giebt $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ das Quadrat IK.
addire $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ das Quadrat FI.
kommt $\sqrt{20}$. ein Rectang. Medium.

Ferner

FG $\sqrt{:}\sqrt{5}+\sqrt{2}$. mit GH $\sqrt{:}\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (mult.

$5+\sqrt{10}$

$-2-\sqrt{10}-2$

kommt $\sqrt{3}$. vor das Rect. Med. IH.

10. Anmerckung.

OP $\sqrt{\sqrt{128}}$. mit OQ $\sqrt{\sqrt{32}}$. mult.
thut $\sqrt{\sqrt{4096}}=\sqrt{64}=8$. vor die Rat. Fläche OPRQ.

12. An-

12. Anmerckung.

Zu dem $\square WY\, 6 + \sqrt{10}$
addire das $\square WZ\, 6 - \sqrt{10}$
kommt 12. ſo rational.

WY $\sqrt{:6 + \sqrt{10}}$. mit WZ $\sqrt{:6 - \sqrt{10}}$

$36 + \sqrt{360}$ (mult.
$- 10 - \sqrt{360} - 10.$

$\sqrt{26}$. das Rect. Med. WYXZ.

13. Anmerckung.

AB $\sqrt{:\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{3\frac{1}{2}}}$. quadrirt,
giebt $\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{3\frac{1}{2}}$
AC $\sqrt{:\ 7\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{2}}}$. auch quadrirt.
giebt $\sqrt{7\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{2}}$
addire $\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{3\frac{1}{2}}$. das Quadrat von AB.
giebt $\sqrt{30}$. ein Rect. Medium.

Ferner

AB $\sqrt{:\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{3\frac{1}{2}}}$. mit AC $\sqrt{:\sqrt{7\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{2}}}$

$7\frac{1}{2} + \sqrt{26\frac{1}{4}}$ (mult.
$- 3\frac{1}{2} - \sqrt{26\frac{1}{4}} - 3\frac{1}{2}.$

$\sqrt{4} = 2$. das Rat. Rect. ABDC.

14. An=

14. Anmerckung.

Die Berechnung iſt der 8. Anmerckung gantz conform.

Folgen einige reſolvirte Propoſ. ermeldten 10ten Buchs.

Die 29. Propoſition.

A $\surd$ 30 mit B $\surd$ 20 mult.

thut $\surd$ 600. hieraus rad. □. kommt $\surd\surd$ 600. das Medium proportionale.

wie B	zu C	alſo D zu E
$\surd$ 20	$\surd$ 4	$\surd\surd$ 600.
$\surd\surd$ 400	$\surd\surd$ 16.	komt $\surd\surd$ 24. vor E.

Die 32. Propoſition.

AC 8 mit CD $\surd$ 48 mult. bringt $\surd$ 3072. hieraus rad. □ giebt $\surd\surd$ 3072 das med. proportionale vor CB oder AE. Dann

wie AC	gegen CB	alſo AE gegen EF.
8	$\surd$ 48	$\surd\surd$ 3072

komt $\surd\surd$ 1728. vor EF.

AE $\surd\surd$ 3072. mit EF $\surd\surd$ 1728. mult.

giebt $\surd\surd$ 5308416. ſo $=\surd$ 2304. $=$ 48. (ein rationale.

Und

Und

von □ AE $\sqrt{3072}$. 1024. 32

ſubtr. das □ EF $\sqrt{1728}$. 576. 24

8 quadrirt.

64 mit 3. mult.

$\sqrt{192}$. deſſen

rad. □ iſt $\sqrt{\sqrt{192}}$. ſo gegen $\sqrt{\sqrt{3072}}$

($\sqrt{\sqrt{192}}$) $\sqrt{\sqrt{1}}$. $\sqrt{\sqrt{16}}$

wie 1 gegen - - 2.

Die 36. Propoſition.

AC $\sqrt{\sqrt{72}}$. halbirt, oder mit 2. div. (mache 2. zu $\sqrt{\sqrt{16}}$.)

komt $\sqrt{\sqrt{4\frac{1}{2}}}$. vor HB.

Und alſo halbire auch DE $\sqrt{\sqrt{8}}$. kommt $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ vor DF ſo gleich BG.

Von □ HB $\sqrt{4\frac{1}{2}}$

ſubtr. das □ BG $\sqrt{\frac{1}{2}}$

bleibt das □ HG $\sqrt{2}$. dahero HG $\sqrt{\sqrt{2}}$. folgl. AG $\sqrt{\sqrt{4\frac{1}{2}}} + \sqrt{\sqrt{2}}$. dis AG quadrirt.

$\sqrt{4\frac{1}{2}} + \sqrt{3}$

$+ \sqrt{2} + \sqrt{3}$ $+ \sqrt{2}$

komt $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{12}$. vor das □ von AG.

hierzu

hierzu $\sqrt{\frac{1}{2}}$ - - das □ BG.

thut $\sqrt{18} + \sqrt{12}$. das □ AB deſſen □ Wurtzel iſt $\sqrt{:\sqrt{18} + \sqrt{12}}$ vor AB.

Bey dem Beweiß rechne alſo:

BC $\sqrt{:\sqrt{18} - \sqrt{12}}$ quadrirt.

giebt $\sqrt{18} - \sqrt{12}$

hierzu add. $\sqrt{18} + \sqrt{12}$ das □ von AB

komt $\sqrt{72}$. vor beyde Quadrata.

Ferner

AB $\sqrt{:\sqrt{18} + \sqrt{12}}$ mit BC $\sqrt{:\sqrt{18} - \sqrt{12}}$ (mult.

komt $18 + \sqrt{216}$

$-$ $12 - \sqrt{216} - 12$

bringt $\sqrt{6}$. vor das Rectangulum Medium.

Die 44. Propoſition.

BC $\sqrt{\sqrt{18}}$ in 3. div. (mache 3. zu $\sqrt{\sqrt{81}}$.)

kommt $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{9}}}$. vor BD, alſo reſt

(DC $\sqrt{\sqrt{18}} - \sqrt{\sqrt{\frac{2}{9}}} = \sqrt{\sqrt{3\frac{5}{9}}}$.

AB $\sqrt{\sqrt{72}} + \sqrt{\sqrt{\frac{2}{9}}}$. mit DC $\sqrt{\sqrt{3\frac{5}{9}}}$. mult.

giebt $\sqrt{\sqrt{256}} + \sqrt{\sqrt{\frac{64}{81}}}$. oder $\sqrt{16} + \sqrt{\frac{8}{9}}$.

Die 45. Propoſition.

$\sqrt{}\sqrt{}\,37\tfrac{1}{2} + \sqrt{}\sqrt{}\,24$ mit $\sqrt{}\sqrt{}\,37\tfrac{1}{2}$. mult.

$\sqrt{}\,37\tfrac{1}{2} + \sqrt{}\,30$.

Die 46. Propoſition.

Iſt vorhergehend bey Quadrirung derer Binomiorum berechnet worden.

Die 47. Propoſition.

CB $\sqrt{}:\sqrt{}\,54 - \sqrt{}\,18$ in 2. divid.

komt $\sqrt{}:\sqrt{}\,3\tfrac{3}{8} - \sqrt{}\,1\tfrac{1}{8}$. vor DB.

AD $\sqrt{}:\sqrt{}\,54 + \sqrt{}\,18 + \sqrt{}:\sqrt{}\,3\tfrac{3}{8} - \sqrt{}\,1\tfrac{1}{8}$. qvadr.

mit $\sqrt{}:\sqrt{}\,54 + \sqrt{}\,18$. mult.

$\sqrt{}\,54 + \sqrt{}\,18$

□ DB $\sqrt{}\,3\tfrac{3}{8} - \sqrt{}\,1\tfrac{1}{8}$

$\sqrt{}\,84\tfrac{3}{8} + \sqrt{}\,10\tfrac{1}{8}$

$13\tfrac{1}{2} + \sqrt{}\,60\tfrac{3}{4}$

$-\,4\tfrac{1}{2} - \sqrt{}\,60\tfrac{3}{4}$

$\sqrt{}\,9 = 3$, dis 2. mahl iſt 6.

Alſo das □ AD $\sqrt{}\,84\tfrac{3}{8} + \sqrt{}\,10\tfrac{1}{8} + 6$

hierzu das □ DB $\sqrt{}\,3\tfrac{3}{8} - \sqrt{}\,1\tfrac{1}{8}$

$\sqrt{}\,121\tfrac{1}{2} + \sqrt{}\,4\tfrac{1}{2} + 6$

AD DB

$\sqrt{:}\sqrt{54}+\sqrt{18}+\sqrt{:}\sqrt{3\frac{3}{8}}-\sqrt{1\frac{1}{8}}$ mit $\sqrt{:}\sqrt{3\frac{3}{8}}$
(— $\sqrt{1\frac{1}{8}}$. mult.

komt 3 + $\sqrt{3\frac{3}{8}}-\sqrt{1\frac{1}{8}}$

Die 48. Propoſition.

AD $\sqrt{:}\sqrt{18}+\sqrt{12}$ + $\sqrt{:}\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$. qv.

$\sqrt{18}+\sqrt{12}$ (mit $\sqrt{:}\sqrt{18}+\sqrt{12}$

das □ DB $\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$ $4\frac{1}{2}-\sqrt{15\frac{1}{2}}$

$\sqrt{28\frac{3}{8}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$ $-3+\sqrt{13\frac{1}{2}}$

$\sqrt{1\frac{1}{2}}$. dis 2. mal
(thut $\sqrt{6}$.

Alſo das □ AD $\sqrt{28\frac{3}{8}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}+\sqrt{6}$.
hierzu das □ DB $\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\sqrt{40\frac{1}{2}}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$. vor
(beyde □.

AD $\sqrt{:}\sqrt{18}+\sqrt{12}+\sqrt{:}\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$. mit DB
($\sqrt{:}\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$. mult.

kommt $\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$. das Reſt.

Die 55. Propoſition.

AE 8. ſoll in 2. Theil alſo getheilet werden, daß beyde Theile in einander mult. 12. komme.

Setze dem einem Theil 1. R. ſo iſt der andere Theil 8 — 1 R. beydes mult. kommt.

8 R — 1 Z = 12

1 Z = 8 R — 12

halb 4. diß quadrirt.

16
— 12

4. deſſen rad. 2. 2.
+ 4 — 4

1 R = 6 und 2. vor AG und (GE.

Oder aber

Kan geſchehen, wie bey der Propoſition folgend wird berechnet werden.

Die

Die 56. Propoſition.

Wie AG und GE zu finden

Hierzu braucht man die Figur mit dem halben Circul-Bogen. [55.10.]

AE iſt $\sqrt{180}$. FK 5.

Dieſem nach SK $\sqrt{45}$. von deſſen □ 45 ſubtr. das □ FK 25 reſtirt 20 alſo SF $\sqrt{20}$.

hierzu add. AS $\sqrt{45}$.

komt vor AF ſo = AG $\sqrt{125}$.

Ferner ſubtr. SF $\sqrt{20}$ von SE $\sqrt{45}$ reſtirt $\sqrt{5}$ vor FE, ſo = GE oder GL.

Die 57. Propoſition.

AG und GE zu finden.

Man erwehle hierzu wieder die Figur (der gedachten 55. Prop. des 10. Buchs.)

AE iſt $\sqrt{128}$. FK $\sqrt{14}$.

Dieſem nach iſt SK $\sqrt{32}$ von deſſen □ 32 ſubtr. das □ FK 14. reſtirt 18 alſo SF $\sqrt{18}$. zu dieſem SF $\sqrt{18}$. add. AS $\sqrt{32}$ kommt $\sqrt{98}$ vor AF ſo = AG.

Ferner von SE $\sqrt{32}$. ſubtr. SF $\sqrt{18}$. reſtirt $\sqrt{2}$. vor FE, ſo = GE = GL.

Die 58. Propoſition.

AG und GE zu finden.

Es bleibe die Figur [55. 10.]

AE iſt hier 6. und FK $\sqrt{6}$. SK hält 3.

von	□ SK	9
ſubtr. das	□ FK	6
reſtirt		3. alſo $\sqrt{3}$ SF.

Dahero AF $3 + \sqrt{3}$, ſo gleich AG.

Von SE 3. ſubtr. SF $\sqrt{3}$. komt $3 - \sqrt{3}$. vor FE, ſo gleich GE oder GL.

Die 59. Propoſition.

AG und GE zu berechnen.

Es bleibt wieder die Figur [55. 10.]

AE iſt $\sqrt{24}$ und FK 2. dahero SK $\sqrt{6}$.

von	□ SK	6
ſubtr. das	□ FK	4

reſt das □ SF 2. alſo die Seite SF $\sqrt{2}$.

Dahero AF $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ ſo gleich AG.

Von SE $\sqrt{6}$. ſubtr. SF $\sqrt{2}$. bringt $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ vor FE ſo = GE oder GL.

Die 60. Propoſition.

Wieder die Figur [55. 10.]

AE iſt $\sqrt{45}$ und FK $\sqrt{4\frac{1}{2}}$. alſo SK $\sqrt{11\frac{1}{4}}$.

von □ SK $11\frac{1}{4}$
ab das □ FK $4\frac{1}{2}$

reſtirt das □ SF $6\frac{3}{4}$. alſo die Seite SF $\sqrt{6\frac{3}{4}}$.
Dahero AF, $\sqrt{11\frac{1}{4}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$. ſo gleich AG.
Von SE $\sqrt{11\frac{1}{4}}$ ſubtr. SF $\sqrt{6\frac{3}{4}}$. bringt vor FE $\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$. ſo = GE oder GL.

Die Approbation oder Berechnung, zum Beweiß dieſer 60. Prop. gehörig, iſt folgende:

$\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}}$. mit $\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}}$.

Fac. $\sqrt{11\frac{1}{4}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$.

$\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{6\frac{3}{4}}}$. mit $\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{6\frac{3}{4}}}$.

Fac. $\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$.

Nun addire beyde □ zuſammen.

$\sqrt{11\frac{1}{4}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$
$\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$

komt $\sqrt{45}$. ein Rect. Medium.

$\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}}$. mit $\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{6\frac{3}{4}}}$.

$11\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1215}{16}}$
$-\ 6\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{1215}{16}}-6\frac{3}{4}$

Fac. $\sqrt{4\frac{1}{2}}$. auch ein Rect. Medium.

$\surd:\surd 11\tfrac{1}{4} + \surd 6\tfrac{3}{4} + \surd:\surd 11\tfrac{1}{4} - \surd 6\tfrac{3}{4}.$ mit

$(\surd:\surd 11\tfrac{1}{4} + \surd 6\tfrac{3}{4} + \surd:\surd 11\tfrac{1}{4} - \surd 6\tfrac{3}{4}.$

$\surd 11\tfrac{1}{4} + \surd 6\tfrac{3}{4} \qquad \surd 4\tfrac{1}{2}$

$\surd 11\tfrac{1}{4} - \surd 6\tfrac{3}{4} \qquad \surd 4\tfrac{1}{2} + \surd 11\tfrac{1}{4} - \surd 6\tfrac{3}{4}$

Fac. $\surd 45 \quad + \quad \surd 18.$ das □ MO.

Die 75. Propoſition.

$\surd\surd 72.$ mit $\surd\surd 18$

Fac. $\surd\surd 1296 = \surd 36 = 6.$

Die 76. Propoſition.

$\surd\surd 600.$ mit $\surd\surd 24.$

Fac. $\surd\surd 14400 = \surd 120.$

Die 77. Propoſition.

$\surd:32 + \surd 384.$ mit $\surd:32 - \surd 384$

$1024 + \surd 393216$

$-\ 384 - \surd 393216 - 384.$

Fac. $\surd 640.$

Die 78. Propoſition.

$\surd:\surd 54 + \surd 18.$ mit $\surd:\surd 54 + \surd 18.$

$54 + \surd 972$

$-\ 18 - \surd 972 - 18$

Fac. $\surd 36 = 6,$ ein rationale,

Die

Die 79. Propoſition.

$\sqrt{:}\sqrt{18}+\sqrt{12}$. mit $\sqrt{:}\sqrt{18}-\sqrt{12}$

$18+\sqrt{216}$

$-12-\sqrt{216}-12$

Fac. $\sqrt{6}$. ſo medial.

Die 80. Propoſition.

$\sqrt{108}+\sqrt{12}$. mit $\sqrt{108}-\sqrt{12}$

$108+\sqrt{1296}=36$

$+\ 12+\sqrt{1296}=36+12$

Fac. $120 \quad +72$ oder 192.

$\sqrt{75}+\sqrt{27}$. mit $\sqrt{75}+\sqrt{27}$

$75+\sqrt{2025}=45$

$27+\sqrt{2025}=45+27$

Fac. $102 \quad +90$ oder 192. gleich vorhero.

$\sqrt{108}-\sqrt{27}$. mit $\sqrt{108}-\sqrt{27}$

$108-\sqrt{2916}=54$

$+\ 27-\sqrt{2916}=54+27$

Fac. $135- \quad 108$. oder 27.

$\sqrt{75} - \sqrt{12}$. mit $\sqrt{75} - \sqrt{12}$

$75 - 30$

$+ 12 - 30 + 12$

Fac. $87 - 60$. oder 27. gleich vorhero.

Die 82. Propoſition.

$\sqrt{\sqrt{600}} + \sqrt{\sqrt{24}}$. mit $\sqrt{\sqrt{384}}$.

$\sqrt{\sqrt{230400}} + \sqrt{\sqrt{9216}}$

Fac. $\sqrt{480} + \sqrt{96}$.

Die 83. Propoſition.

$\sqrt{:}6 + \sqrt{10} + \sqrt{:}24 - \sqrt{160}$. mit $\sqrt{:}54 - \sqrt{810}$

Fac. $\sqrt{234} + \sqrt{:}1656 - \sqrt{1866240}$.

Nota, hier multiplicire erſtlich.

$\sqrt{:}6 + \sqrt{10}$. mit $\sqrt{:}54 - \sqrt{810}$

$324 + \sqrt{29160}$

$- 90 - \sqrt{29160} - 90$.

komt 234.

Dann multiplicire auch

$\sqrt{:}24 - \sqrt{160}$. mit $\sqrt{:}54 - \sqrt{810}$.

$1296 - \sqrt{466560}$

$+ 360 - \sqrt{466560}$

$1656 - \sqrt{1866240}$.

Die

Die 104. Propoſition.

Wie 8 zu 16 alſo $\surd 28$ zum Facit.

Fac. $\surd 112$.

Die 105. Propoſition.

Wie $\surd\surd 72$ zu $\surd\surd 1152$ alſo $\surd\surd 18$. zum Fac.

Fac. $\surd\surd 288$.

Die 106. Propoſition.

wie	zu	alſo zu Facit
$\surd{:}\,32+\surd 384$	$\surd{:}\,8+\surd 24$	$\surd{:}\,32-\surd 384$

Fac. $\surd{:}\,8-\surd 24$.

Die 107. Propoſition.

wie	zu	alſo zum F.
$\surd{:}\,\surd 54+\surd 18$	$\surd{:}\,\surd 4374+\surd 1458$	$\surd{:}\,\surd 54$ $(-\surd 18$

Fac. $\surd{:}\,\surd 4374-\surd 1458$.

Die 108. Propoſition.

wie	zu	alſo zum F.
$\surd{:}\,\surd 18+\surd 12$	$\surd{:}\,\surd 288+\surd 192$	$\surd{:}\,\surd 18$ $(-\surd 12$

Fac. $\surd{:}\,\surd 288-\surd 192$.

Die

Die 113. Propoſition.

$\sqrt{6} + 2$. mit $\sqrt{24} - 4$.

$12 + \sqrt{96}$

$- 8 - \sqrt{96}$

Fac. 4.

Die 6. Propoſition des 14. Buchs.

BI $\sqrt{:2\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}}$. mit BH $\sqrt{3}$.

Fac. $\sqrt{:7\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}}}$.

Ferner

KL $\sqrt{:4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}}}$. mit BG $\sqrt{:2\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$

$\frac{45}{4} - \sqrt{\frac{1125}{16}}$

$- \frac{15}{4} + \sqrt{\frac{405}{16}}$

Fac. $\sqrt{:7\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}}}$.

Das

Das Erſte Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1. Ein Punct iſt, ſo nicht kan zertheilet werden.

2. Eine Linie iſt eine Långe, ſonder einige Breite.

3. Das åuſerſte von denen Linien, ſeynd Puncte.

4. Eine gerade oder rechte Linie iſt, die kůrtzeſte zwiſchen zweyen Puncten ausgeſtreckte gerade Linie.

5. Superficies oder Flåchen ſeynd, die Lången und Breiten haben.

6. Das åuſerſte derer Flåchen, ſeynd Linien.

7. Eine ebene Flåche oder Superficies, lieget zwiſchen ihren Linien.

8. Ein flacher- ebener- oder gleicher Winckel iſt, wenn 2. Linien auf einen ebenen Platz, einander in einen Punct anrůhren.

Nota, Die Winckel werden gemeiniglich mit 3. Buchſtaben alſo gezeichnet; Da allezeit der mittlere Buchſtab den Winckel bedeutet, zum Ex. der Winckel B. wird benennet, A B C.

9. Wenn 2. Linien, die einen Winckel machen, gerade oder rechte Linien ſeynd, ſo wird ſolcher Winckel, ein gerad-liniſcher Winckel genennet.

10. Wann eine rechte Linie CD, auf einer andern rechten oder geraden Linie AB ſtehet, und die Winckel zu beyden Seiten gleich machet, ſo ſeynd ſolche beyde Winckel, rechte Winckel, das iſt, ieder von 90. Grad.

11. Obtuſus oder ſtumpffer Winckel, iſt gröſſer als ein rechter Winckel (nehmlich über 90. Grad.) gleich wie hier der Winckel ABC.

12. Acutus ein ſcharffer oder ſpitziger Winckel, iſt kleiner als ein rechter Winckel (nehmlich unter 90. Grad) gleich wie hier der Winckel ABD.

13. Terminus oder das Ende, iſt dasjenige, womit etwas geendet oder beſchloßen wird.

14. Eine Figur iſt, welche mit einem, oder mehr Enden beſchloßen.

Gleich als ein Circul, oder ein 3. 4. 5. Eck, &c.

15. Ein Circul iſt eine runde flache Figur, deſſen äuſere Linie die Circumferentz genennet wird, da die gerade Linien, von deſſen Centro an die Circumferentz gezogen, allezeit einander gleich ſeynd.

16. Des Circuls Mittel-Punct, wird Centrum genennet.

17. Eine

17. Eine gerade Linie A B durch eines Circkels Centrum bis an die Circumferentz gezogen, heiſſet Diameter, ſo den Circul allezeit in 2. gleiche Theil theilet.

C B iſt der halbe- oder Semidiameter.

18. Ein halber Circul iſt von Diametro, und der halben Circumferentz beſchloſſen.

19. Rechtliniſche Figuren, ſeynd von geraden Linien beſchloſſen.

20. Dreyeckichte Figuren (Triangel) ſeynd, welche von 3. geraden Linien beſchloſſen.

21. Vierſeitige Figuren, ſeynd von 4. geraden Linien beſchloſſen, und ſo fort.

22. Vielſeitige Figuren, ſeynd von mehr denn 4. geraden Linien beſchloſſen.

Nota, 2. gerade Linien können keine Figur beſchlieſſen.

23. Ein gleichſeitiger Triangel Æqvilaterus iſt Lit. A. ſo 3. gleiche Seiten hat.

24. Ein Iſosceles iſt Lit. B. welcher nur 2. gleiche Seiten hat.

25. Scalenum ein Triangel Lit. C. ſo 3. ungleiche Seiten hat.

26. Rectangulus, Orthogonius, oder ein rechtwincklichter Triangel iſt D. ſo einen rechten Winckel von 90. Grad hat.

27. Obtuſus, Amblygonius oder ein ſtumpffwincklichter Triangel iſt E. ſo einen ſtumpffen Winckel (der über 90. Grad) hat.

28. Acu-

28. Acutangulus, Oxigonius oder ein ſcharff-wincklichter Triangel iſt F. welcher 3. ſcharffe Winckel (deren ieder unter 90. Grad) hat.

29. Ein Qvadrat iſt G. von 4. gleichen Seiten, und 4. rechten Winckeln beſchloßen.

30. Ein Parallelogram iſt H. ie von 2. gleichen Seiten, und 4. rechten Winckeln beſchloßen.

Nota, es wird offtmahlen auch ein geſchoben Viereck, ie von 2. gleichen Seiten, und ie 2. gleichen Winckeln, ein Parallelogram genennet, wie bey ietzt folgender 35. Definition geſchiehet.

31. Rhombus oder ein ſchräg 4. Eck I. beſtehet, in vier gleichen Seiten, und ie 2. gleichen Winckeln.

32. Rhomboides, ein geſchoben Parallelogram K. hat ie 2. Winckel und 2. Seiten gegen einander über, gleich.

Wird gemeiniglich wie vorgedacht, nur ein Parallelogram genennet.

33. Alle andere 4ſeitige gerad liniſche Figuren L. werden Trapezia oder Quadrilatera genennet.

34. Parallel-Linien A B, C D. ſeynd, ſo auf einer Ebene gleich weit von einander liegen, und ob ſie gleich zu beyden Seiten unendlich erlängert würden, dennoch nimmermehr zuſammen kommen können.

35. Ein

35. Ein Parellogram iſt M, eine Figur von 4. geraden Linien beſchloßen, von welchen ie 2. Seiten gegen einander über parallel oder gleich weit von einander liegen.

36. Wenn in einen Parallelogram A B C D. der Diameter oder Diagonal-Linie A C gezogen/ und darinne der Punct E genommen, denn F G und H I, mit B C und D C parallel gezogen, ſo werden die Parallelogram E B und E D, Complementa genennet.

Poſtulata oder Begehrungen.

1. Von einem Punct zum andern, eine gerade Linie zu ziehen.

2. Eine gerade Linie continüirlich fortzuziehen.

3. Aus einen Punct nach begehrter Weite, einen Circul zu ziehen.

Axiomata oder allgemeine bekandte Warheiten.

1. Gleiche Quantitäten, da die erſte gleich der dritten, werden alle einander gleich ſeyn.

Nota, Wenn einige Quantitäten künfftig hin continue mit = bemercket werden/ ſo iſt vermöge dieſen Axioma, die erſte Quantität gleich der letzten.

Zum Ex. A 8. = B 8. = C 8. = D 8. dahero alle A. B. C. D. einander gleich.

E 2. Gleich

2. Gleich zu gleich (12 und 12 zu 8 und 8.) addirt, werden die Summen (20 = 20) auch gleich ſeyn.

3. Gleich von gleich (6 = 6 von 16 = 16) weggenommen oder ſubtrahirt, bleiben die Reſte (10 = 10) auch gleich.

4. Gleich zu Ungleich (8 = 8 zu 7 und 9) addirt, werden die Summen (15 und 17) auch ungleich ſeyn.

5. Gleich von Ungleich (6 = 6 von 13 und 17) ſubtrahirt/ werden die Reſte (7 und 11) allezeit ungleich ſeyn.

6. So iedes/ doppelt oder dreyfach ſo groß, als ein anders (8 und 8 = doppelt, und 12 und 12 = dreyfach gegen 4.) die werden einander (8 = 8 und 12 = 12) gleich ſeyn.

7. Alſo auch iedes, halb, oder der dritte Theil &c. werden einander auch gleich ſeyn. Zum Ex. 4. 4. 4. iſt iedes der dritte Theil aus 12. dahero ſeynd 4. 4. 4. einander gleich.

8. Welche Quantitäten, einander nicht übertreffen, die ſeynd einander gleich.

Zum Ex. 10. 10. 10. übertrifft keines das andere, darum ſeynd ſie einander gleich.

9. Das Gantze iſt allezeit gröſſer, als ſein Theil. Zum Ex. das Gantze ſey 12. ein Theil davon 11. dahero iſt 12. gröſſer als 11.

10. Alle Winckel auf einer geraden Linie, wie ſie auch gemachet werden, ſeynd ſämmtlich alle-

allezeit gleich, 2. rechten Winckeln oder 180. Grad.

Und dieſes iſt ein halber Circul, dahero der gantze Circul 360. Grad oder 4. rechte Winckel beträget.

Die 1. Propoſition.

Auf eine fürgegebene gerade Linie AB einen gleichſeitigen Triangel zu machen.

Operatio.

In der Weite AB beſchreibe aus A und B 2. Circul-Bögen, die einander in C durchſchneiden, dieſem nach wird ABC. der begehrte Triangel ſeyn.

Beweiß.

AB iſt [15. Def. 1.] = AC = BC. dahero [23. Def. 1.] der Triangel ABC, ein gleichſeitiger Triangel.

Die 2. Propoſition.

Von einen gegebenen Punct A eine gerade Linie AD. ſo gleich der fürgegebenen BC, zuziehen.

Operatio.

Man nehme die Länge BC, und ziehe in ſolcher Weite den Bogen EF. ſo wird AD. (oder auch AE oder AF) die begehrte Linie ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt [15. Def. 1.] eine an ſich ſelbſt klare Sache.

Die 3. Propoſition.

Von einer geraden Linie AB eine kürtzere fürgegebene CD. abzuſchneiden.

Operatio.

Man reiße in der Weite CD aus A den Bogen EGF, ſo wird GB der begehrte Reſt ſeyn.

Beweiß.

Iſt wieder deutlich genug, ſonder einigen Zweiffel.

Die 4. Propoſition.

Wenn bey zwey Triangeln ABC und DEF. zwey Seiten AB, BC des einem, gleich denen zwey Seiten DE, EF des andern, auch die Winckel B und E. von ſolchen Seiten begriffen einander gleich. So werden auch ihre dritte Seiten AC und DF, in ſumma, beyde Triangel in allen und jeden einander gleich ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt wieder gantz deutlich und klar, denn da

da die Winckel B und E einander gleich, und man einen Triangel auf den andern legen ſolte, ſo würden die Seiten und Ecken gantz juſt auf einander treffen. Dahero beyde Triangel gleich groß und gleichförmig ſeyn.

Die 5. Propoſition.

Ein jeder Triangel von 2. gleichen Seiten CB und CD, hat die 2. Winckel auf der baſi BD einander gleich. Und wenn man deſſen 2. gleiche Seiten erlängert, ſo werden auch die euſern Winckel unter der baſi BDF und DBE einander gleich ſeyn.

Beweiß.

Die Winckel CBD und DBE ſind zuſammen [10. ax. 1.] = 2. rechten Winckeln. Dergleichen ſeynd auch beyde Winckel CDB und BDF zuſammen. Nimm von beyden weg, die gleichen Winckel CBD und CDB ſo wird [3. ax. 1.] der Winckel DBE = dem Winckel BDF übrig bleiben.

Die 6. Propoſition.

Wenn in einen Triangel ABC die beyden Winckel A und C einander gleich, ſo werden auch deren unterzogene

Seiten BC und AB einander gleich ſeyn.

Beweiß.

Es iſt zwar an ſich ſelbſt klar. Jedoch laſſe man AD der BC gleich ſeyn. Dieſemnach wären [4. 1.] die Triangel ADC und ABC einander gantz gleich und ähnlich, ſo aber, wie ſichtbarlich zu ſehen, ungereimt.

Die 7. Propoſition.

Wenn von einer Linie AB, die 2. Linien AC und BC gezogen werden, wodurch der Triangel ABC formiret wird. So iſt nicht möglich, daß aus A eine andere Linie AC und aus B eine andere Linie BC gleich, die in einem andern Punct als C zuſammen kommen können, mögen gezogen werden.

Beweiß.

1. Caſus. Geſetzt! es könte in einem andern Punct auf der Linie AC in D geſchehen, ſo iſt offenbar, daß [9. ax. 1.] AD der AC nicht gleich ſeyn kan.

2. Caſus. Geſetzt! der Punct könte innerhalb des Trianguls bey E hinfallen, dieſemnach müſte AE = AC und BE = BC, item, der Triangel

angel ACB dem Triangel AEB gantz gleich ſeyn, ſo [4. 1.] wieder die Wahrheit ſtreitet.

3. Caſus. Geſetzt! der Punct könte auſſerhalb des Triangels bey F fallen. So müſte AF = AC und BF = BC, folglich auch der Winckel [4. 1.] ABC dem Winckel ABF gleich ſeyn. Welches ebenfalls wieder die Wahrheit. Dahero kan ſolches kein anderer Punct, als der Punct C ſeyn.

Nota, Wechſels-weiſe könte wohl BF = AC, und AF = BC ſeyn, und alſo der Punct bey F hinfallen, welches aber der Propoſition nicht gemäß.

Die 8. Propoſition.

Wenn 2. Triangel ABC, DEF, ie 2. Seiten, nemlich AB der DE, und BC der EF gleich, auch ihre baſes AC und DF einander gleich. So werden auch die Winckel B und E einander gleich ſeyn.

Beweiß.

Beyde Triangel ſeynd einander [4. 1.] gantz gleich und ähnlich/ folglich iſt auch der Winckel B. dem Winckel E gleich.

Anhang.

1. Hieraus entſtehet, daß alle Triangel ſo

gleiche Seiten untereinander haben/ auch gegen einander gleichwincklicht ſeynd.

2. Alle Triangel, ſo gleiche Seiten mit einander haben, ſeynd einander gantz gleich/ groß, und ähnlich.

Die 9. Propoſition.

Einem gegebenen recht-liniſchen Winckel ABC, in 2. gleiche Theil zu theilen.

Mache BE = BF, dann formire den gleichſeitigen Triangel [1. 1.] EFG, ſo wird die Linie BG dem Winckel DBC in 2. gleiche Theil zertheilen.

Beweiß.

Der Triangel EBG iſt = [8. 1.] dem Triangel FBG, dahero auch der Winckel EBG = dem Winckel FBG. ſo zu beweiſen war.

Die 10. Propoſition.

Eine gegebene gerade Linie AB in 2. gleiche Theil zu theilen.

Auf AB mache [1. 1.] dem gleichſeitigen Triangel ACB, und theile dem Winckel C [9. 1.] in 2. gleiche Theil, durch CD, ſo iſt D der Theilungs-Punct.

Be-

Beweiß.

AC iſt = CB, und CD beyden Triangeln ACD und DCB gemein, auch der Winckel ACD = dem Winckel DCB. Dahero [4. 1.] AD = DB.

Die 11. Propoſition.

Von einem Punct C, auf eine gerade Linie AB eine perpendicular- oder winckel-rechte Linie zu ſtellen.

Aus C mache nach Belieben CD = CE, und ſtelle auf DE dem gleichſeitigen Triangel DFE, ſo wird FC die begehrte perpendicular-Linie ſeyn.

Beweiß.

DFC und CFE ſeynd [4. 1.] gantz gleiche Triangel. Dahero auch der Winckel [8. 1.] DCF = ECF, und ieder [10. ax. 1.] ein rechter Winckel.

Die 12. Propoſition.

Von einem gegebenen Punct A, oberhalb der Linie BC eine perpendicular-Linie AF, zu fällen.

Aus A ziehe nach Gefallen dem Circul-Bogen DE, dann theile DE [10. 1.] in 2. gleiche Theil, ſo wird AF die begehrte perpendicular-Linie ſeyn.

Beweiß.

Der Triangel DAF iſt [4. 1.] = dem Triangel EAF, item DF iſt [10. 1.] = FE. Dahero [11. 1.] AF auf BC perpendicular.

Die 13. Propoſition.

Wenn auf einer rechten Linie AC, eine andere rechte Linie BD ſtehet. So werden die 2. Winckel ABD und CBD zuſammen genommen, 2. rechten Winckeln gleich ſeyn.

Beweiß.

Ob ſolches zwar allbereit [10. ax. 1.] gantz richtig und klar.

So ſey doch auf andere Art, aus B die Perpendicular BE geſtellet, wodurch auf AC [11. 1.] 2. rechte Winckel EBA und EBC formiret werden, welche denen beyden Winckeln ABD und CBD zuſammen gleich ſeynd.

Die 14. Propoſition.

So von einem Punct B der geraden Linie AB, 2. andere gerade Linien BC und

und BD gezogen, und dadurch beyde Winckel CBA und ABD zuſammen 2. rechten Winckeln gleich werden, ſo wird CBD eine gerade Linie ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt vice verſa vorhergehende 13. Propoſition, und dahero albereit bewieſen. Sintemaln, wenn jenes nicht warhafft, könte dieſes auch nicht war ſeyn.

Die 15. Propoſition.

Wenn 2. gerade Linien DE und FG. einander durchſchneiden, ſo ſind die Winckel gegen einander über, einander gleich.

Beweiß.

Weil eine gerade Linie allezeit [13. 1.] 2 rechte Winckel oder 180. Grad hält. So laſſe man dem Winckel FHE. 130. Grad ſeyn, dieſemnach wird der Winckel EHG 50. Grad. item, weil die Linie ED auch 180 Grad hält. Wird der Winckel GHD 130 Grad, und dann der Winckel DHF 50 Grad halten. Weßwegen allezeit, die gegen einander ſtehende Winckel, einander gleich ſeyn werden.

Die

Die 16. Propoſition.

Wenn man nach gefallen die eine Seite (B C) eines Triangels A B C erlängert (B C D) ſo wird der auswendige Winckel A C D allezeit gröſſer, als einer der inwendig gegenüberſtehenden Winckel A oder B. ſeyn.

Operatio.

Theile A C und B C [10. 1.] in 2 gleiche Theil in E und H, ziehe B F und A J alſo: daß E F. = B E und H J = A H ſey. Ziehe F C und C J, auch erlängere A C nach G.

Beweiß.

Weiln nun A E = E C, und E F = B E, it. der Winckel F E C [15. 1.] = B E A, So wird der Winckel E C F [4. 1.] = dem Winckel E A B ſeyn. Auf dergleichen Art iſt der Winckel A B H = dem Winckel H C J = F C D. Dahero der Winckel A C D (ſo [15. 1.] gleich B C G) gröſſer [9 ax. 1.] als einer der Winckel C A B oder A B C. So zu beweiſen war.

Die 17. Propoſition.

Eines ieden Triangels A B C. 2. Winckel (welche es auch ſeynd) zuſammen genommen, ſind allezeit kleiner als 2. rechte Winckel.

Be-

Beweiß.

Erlängere eine Seite als hier BC. Dieweil nun der Winckel ACD + ACB [13.1.] = 2. rechten Winckeln, und der Winckel ACD gröſſer [16. 1.] als der Winckel A. Dahero iſt der Winckel A + ACB kleiner [9 ax. 1.] als 2. rechte Winckel. Und auf dergleichen Art, iſt auch der Winckel B + ACB kleiner denn 2. rechte Winckel. So zubeweiſen war.

Die 18. Propoſition.

In allen Triangeln ABC, iſt die gröſte Seite AC, dem gröſten Winckel ABC unterzogen.

Beweiß.

Auf AC mache AD = AB, ſo iſt der Winckel ADB [5. 1.] = ABD. Dieweil aber der Winckel ADB gröſſer [16. 1.] als C, iſt auch ABD gröſſer als C. folglich der Winckel ABC [9 ax. 1.] gröſſer als C. Auf gleiche Art iſt auch der Winckel ABC gröſſer als A.

Die 19. Propoſition.

In ieden Triangel ABC begreifft der gröſte Winckel B die gröſte Seite AC

Be-

Beweiß.

Es iſt eben vorhergehende 18. Propoſition, und dahero albereit bewieſen.

Die 20. Propoſition.

Bey ieden Triangel ABC ſind allezeit 2 Seiten BA und AC (welche man auch nehme) zuſammen gröſſer, als die übrige dritte Seite BC

Beweiß.

Erlängere BA, und mache AD = AC, auch ziehe DC. Der Winckel D wird gleich seyn [5. 1.] dem Winckel ACD. Und alſo iſt der Winckel BCD gröſſer [9. ax. 1.] als der der Winckel D. folglich die Seite BD (BA + AC) gröſſer [19. 1.] als BC. So zubeweiſen war.

Die 21. Propoſition.

Wenn von denen 2 äuſſerſten Puncten der Seite BC, eines Triangels ABC. 2. Linien innerhalb ſolches Triangels, als hier in D zuſammen gezogen werden. So ſind die beyden Linien BD und DC zuſammen kürtzer, als AB und AC zuſammen. Hingegen aber wird der Winckel BDC gröſſer, als der Winckel BAC seyn.

Be-

Beweiß.

Erlångere BD bis E, dann iſt CE + ED [20. 1.] gröſſer als CD, ſetze beyden zu die BD Denn ſoll BD + DE + EC gröſſer als CD + BD ſeyn. Dieweiln auch BA + AE [20. 1.] gröſſer als BE, ſo iſt umb ſo vielmehr BA + AC gröſſer als BE + EC, Dahero BA + AC auch gröſſer als BD + DC. Weiln auch der Winckel BDC [16. 1.] gröſſer als DEC, als wird umb ſo viel mehr ebenfals [16. 1.] der Winckel BDC gröſſer als der Winckel A ſeyn (weil der Winckel BAE kleiner als BEC) So zubeweiſen war.

Die 22. Propoſition.

Aus 3 geraden Linien A, B, C, da ie 2 zuſammen genommen, långer als die dritte, einen Triangel zu machen.

Operatio.

Die Linie A ſey = DE. In der Weite B ziehe aus D bey F eine Circul-Linie. Dann ziehe auch aus E in der Weite C eine andere Circul-Linie, welche die vorige bey F durchſchneidet. Dieſemnach wird DFE der begehrte Triangel ſeyn.

Beweiß.

Dis beweiſet ſich bey der Operation mit der Aufreiſung ſelbſt klar und deutlich.

Die

Die 23. Propoſition.

Aus einem Punckt A der gegebenen Linie AB, einen recht liniſchen Winckel, dem fürgegebenen CDE gleich zu machen.

Operatio.

Ziehe nach Gefallen FG, dann mache AH = DF und HJ auch AJ = FG und DG, ſo wird BAJ der begehrte Winckel ſeyn.

Beweiß.

Die beyden Triangel HAJ und FDG ſind [8.1.] einander gantz gleich. Dahero auch der Winckel HAJ [8.1.] = dem Winckel FDG.

Die 24. Propoſition.

Wenn an zweyen rechtliniſchen Triangeln ABC, und DEG, die 2. Seiten AB und AC = denen 2. Seiten DE und DG. Der Winckel A aber gröſſer, als der Winckel EDG. So wird auch die baſin BC gröſſer als EG ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt zwar durch vorhergehende 4te und 8te Propoſition allbereit zur gnüge erwieſen. Jedoch ſolches etwas weitläufftiger zu demonſtriren.

ren. Mache man [23. 1.] dem Winckel EDF = BAC, item DF = AC oder DG, ſo wird [4. 1.] baſis EF der BC = ſeyn. Ziehe ferner GF. Weiln nun wegen dergleichen Seiten DF und DG [5. 1.] der Winckel DGF = DFG. Und da der Winckel EGF gröſſer, als der Winckel DGF, umb ſo viel mehr iſt dann der Winckel EGF gröſſer als der Winckel EFG. Dahero an dem Triangel EFG [19. 1.] EF (ſo gleich BC) auch gröſſer als EG. So zubeweiſen war.

Die 25. Propoſition.

So an zweyen Triangeln *ABC* und DEF, je 2 Seiten *AB* und *AC* = denen 2 Seiten DE und DF, und baſis BC iſt gröſſer, als baſis EF, ſo wird auch der über BC befindliche Winckel *A* gröſſer, als der Winckel D (über EF) ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt vice verſa vorhergehende 24. Propoſition, und alſo albereit gnüglich erwieſen.

Die 26. Propoſition.

So an zweyen Triangeln *ABC* und EDG, je 2 Winckel *A* und D. Alſo auch der Winckel C = dem Winckel

 F, item,

F, item, die Seite AC = DF als an denen gleichen Winckeln liegende) oder aber 2 andere, mit einander correſpondirende Seiten, als AB = DE. So werden auch iedes Triangels übrige 2 Seiten denen 2 Seiten des andern Triangels, wie auch die übrigen dritte Winckel, in Summa, die Triangel einander gantz gleich ähnlich und gleich groß ſeyn.

Beweiß.

Man gebe zu, daß AB gröſſer als DE ſeyn könte. Wenn nun BG der ED gleich gemachet wird, ſo müſte [4. 1.] GC = DF, item, der Winckel BCG dem Winckel EFD oder BCA gleich ſeyn, welches aber [9. ax. 1.] ungereimt were.

Die 27. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie EF durch 2 andere AB und CD gezogen, die Winckel AEF, und DFE zwerch gegen einander ſtehende, gleich machet, ſo werden beyde Linien AB und CD parallel ſeyn.

Beweiß.

Geſetzt! ſie wären nicht parallel, ſo müſten ſol-

ſolche beyde Linien erlängert, endlich in einem Punct, als G zuſammen laufen, und einen Triangel E G F formiren, da denn der Winckel AEF [16. 1.] gröſſer als der Winckel D F E ſeyn würde, ſo aber wieder die Propoſition ſtreitet: Dahero ſind A B und C D parallel.

Die 28. Propoſition.

So eine rechte Linie E F durch 2 andere gerade Linien AB und C D gezogen, dem auswendigen Winckel A G E = dem inwendigen Winckel C H G, oder aber auch die 2 inwendige gegen einander überſtehende Winckel A G H und C H G zuſammen 2 rechten Winckeln gleich machet. So werden beyde Linien AB und C D parallel ſeyn.

Beweiß.

1. Satz, der Winckel B G H iſt [15. 1.] = dem Winckel A G E, alſo auch gleich dem zwerch überſtehenden Winckel C H G. Weßhalben die 2 Linien [27. 1.] A B und C D parallel.

2. Satz, weil die Winckel A G H + C H G 2 rechten Winckeln = geſetzet worden, ſo auch [13. 1.] gleich A G H + B G H, dieſem nach iſt der Winckel C H G = B G H; und alſo die 2 Linien [27. 1.] A B und CD parallel.

Die 29. Propoſition.

So eine rechte Linie EF, 2 gerade parallel Linien *AB*, CD durchſchneidet. So werden die Winckel welche zwerch überſtehen DHG und *A*GH, wie auch die auswendige Winckel *B*GE dem inwendig entgegen geſetzten DHE einander, desgleichen die 2 inwendige Winckel an der Linie EF, nemlich: *A*GH und CHG zuſammen, 2 rechten Winckeln gleich ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt durch die 27. und 28. Propoſition gnugſam erwieſen, und alſo hier zuwiederhohlen nicht nöthig.

Die 30. Propoſition.

Alle Linien, als hier AB, CD, ſo gegen einer Linie EF parallel, die ſeynd auch gegen einander parallel.

Beweiß.

Es ſey die gerade Linie GHI durch die 3 parallel Linien AB, EF und CD gezogen. Dieſemnach werden die Winckel AGI, EHI [29.1.] und FHI einander gleich, und alſo AB und CD parallel ſeyn.

Die

Die 31. Propoſition.

Von einem gegebenen Punct A, die Linie A E parallel mit der gegebenen geraden Linie B C zuziehen.

Operatio.

Man ziehe nach Gefallen A D, denn mache [23. 1.] dem Winckel D A E = A D C, ſo wird AE mit B C parallel ſeyn.

Beweiß.

Die Winckel D A E und A D C ſind einander gleich. Dahero auch [27. 1.] A E und B C einander parallel.

Die 32. Propoſition.

Wenn an einen Triangel ABC nach gefallen eine Seite davon, als hier B C erlångert wird. So iſt der auswendige Winckel A C D = denen beyden inwendig entgegenſtehenden Winckeln A und B zuſammen. Es ſeynd auch alle 3 inwendige Winckel ſolches Triangels zuſammen, gleich 2 rechten Winckeln.

Beweiß.

Ziehe [31. 1.] CE parallel mit AB, dann

iſt [29. 1.] der Winckel A = dem Winckel ACE. Und B = ECD. Dahero der Winckel A + B = ACD, ſetze hinzu des Triangels dritten Winckel ACB, ſo werden ſolche zuſammen [13. 1.] gleich 2 rechte Winckel ſeyn.

Die 33. Propoſition.

Wenn man 2 gleich lange parallel Linien AB und CD, ſo dann mit 2. andern Linien AC und BD zuſammen ziehet, werden ſolche beyde Linien AC und BD auch einander gleich lang und parallel ſeyn.

Beweiß.

Ziehe BC. Dann iſt der Winckel ABC [29 1.] = BCD, und da AB = CD. So wird AC [4. 1.] = BD. item, der Winckel ACB = BDC und folglich AC [27. 1.] mit BD parallel ſeyn.

Die 34. Propoſition.

In allen Parallelogrammen ABCD, ſeynd die gegen einander überſtehende Seiten AB, CD, und AC, BD, item, die Winckel A und D, wie auch die Winckel ABD und ACD einander gleich. Auch zertheilet die diagonal Linie BC das Parallelogram juſt in 2 gleiche Theil.

Be-

Beweiß.

Der Triangel ABC iſt dem Triangel DCB [4 und 29. 1.] gantz gleich. Dahero nicht allein die gegen einander ſtehende Seiten und Winckel einander juſt gleich, ſondern auch ieder Triangel die Helffte des Parallelograms austräget.

Die 35. Propoſition.

Alle Parallelogram, gleich als ABCD, EBCF, ſo auf einer baſi BC, und zwiſchen 2 parallel Linien BC und AF ſtehen, ſeynd gleiches Inhalts oder gleicher Gröſſe.

Beweiß.

Weil AD [34. 1.] gleich BC = EF, ſetze darzu DE, dann iſt AE = DF, und weil [44. 1.] AB = DC, item, der Winckel A [29. 1.] = CDF ſo iſt der Triangel ABE [4. 1.] = DCF, ſubtrahire von ieden die Fläche DGE, dann wird das Trapezium ABGD = EGCF ſeyn. Dieſen beyden addire ieden beſondern die Fläche BGC. So wird das Parallelogram ABCD dem Parallelogram EBCF gleich ſeyn.

Die 36. Propoſition.

Parallelogramma ABCD, EGHF, ſo auf gleichen baſibus BC, GH, und

zwiſchen zweyen parallel Linien A F und B H ſtehen, ſeynd gleicher Grôſſe.

Beweiß.

Ziehe B E und CF, ſo iſt [33. 1.] E B C F ein Parallelogram = [35. 1.] A B C D = E G H F.

Die 37. Propoſition.

Alle Triangel A B C und D B C, ſo auff einer baſi B C und zwiſchen parallel-Linien E F und B C ſtehen, ſind gleicher Grôße.

Beweiß.

Ziehe B E parallel mit A C, desgleichen C F parallel mit B D. So iſt der Triangel A B C [34. 1] = die Helffte des Parallelograms E B C A = [35. 1.] halb B C F D, = dem Triangel D B C.

Die 38. Propoſition.

Alle Triangel A B C, D E F, ſo auf gleichen baſibus B C, E F, und zwiſchen zweyen parallel-Linien G H und B F ſtehen, ſeynd gleicher Grôße.

Beweiß.

Es iſt dieſes vorhergehender 37. Propoſition gantz gleich.

Die

Die 39. Propoſition.

Alle Triangel A B C und B C D, ſo glei- gleicher Gröſſe ſeynd, und auf einer baſi B C ſtehen, die ſtehen auch zwiſchen zweyen parallel-Linien A D und B C.

Beweiß.

Es iſt dieſes zwar durch vorhergehende 37. und 38. Propoſ. eine gantz offenbahre Warheit. Jedoch aber ſo A D nicht parallel wäre, ſoll A F mit B C parallel ſeyn. Dieſemnach müſte auch [37. 1.] der Triangel F B C = C B A = B CD ſeyn, welches doch gantz ungereimt.

Die 40. Propoſition.

Alle Triangel A B C, E F D ſo gleicher Gröſſe und auf gleichen baſibus B C und E F ſtehen, die ſtehen auch zwiſchen zweyen rechten parallel Linien.

Beweiß.

Iſt vorhergehender 39. Propoſ. gantz conform.

Die 41. Propoſition.

Wenn ein Parallelogram A B C D und ein Triangel B C E auf einer baſi B C, und zwiſchen zweyen parallel Linien

AE und BC ſtehen. So wird das Parallelogram zweymahl ſo groß als der Triangel ſeyn.

Beweiß.

Ziehe AC, dann iſt der Triangel ABC [37.1.] = BCE, und alſo das Parallelogram ABCD [34.1.] = 2 ABC = 2 BCE.

Die 42. Propoſition.

Ein Parallelogram FECG zu machen, ſo einem fürgegebenen Triangel ABC an Inhalt gleich, und einen fürgegebenen Winckel D habe.

Operatio.

Ziehe AG parallel mit BC, und mache dem Winckel BCG [23.1.] = D. Theile BC in 2. gleiche Theil in E, und ziehe EF parallel mit CG

Beweiß.

Dis iſt durch vorhergehende 41. Propoſition allbereit zur Gnüge erwieſen worden.

Die 43. Propoſition.

In allen Parallelogrammen, ſeynd die Supplementa *DG* und *GB*, ſo neben dem Diameter oder der Diagonal-Linie *AC* ſtehen, gleich groß.

Be-

Beweiß.

Der Triangel ACD iſt [34. 1.] = ACB, und AGH = AGE, item, GCF = GCI. Dahero [3. ax. 1.] das Parallelogram DG = GB.

Die 44. Propoſition.

Auf eine gegebene rechte Linie A, ein Parallelogram FL zu machen, ſo dem gegebenen Triangel B an Inhalt gleich, auch einem Winckel, dem fürgegebenen C, gleich, habe.

Operatio.

Mache erſtlich das Parallelogram FD = [42. 1.] dem Triangel B, erlängere GF alſo: Daß FH = der Linie A ſey. Aus H ziehe IL parallel mit EF, erlängere DE biß I, dann ziehe IK, welche die erlängerte DG in K durchſchneidet, ferner von K ziehe KL parallel mit GH, endlich erlängere EF biß M, ſo wird FL das begehrte Parallelogram ſeyn.

Beweiß.

Das Parallelogram FL iſt [43. 1.] = FD = B. Auch der Winckel MFH [15. 1.] = dem Winckel GFE.

Die 45. Propoſition.

An eine gegebene Linie *FG* ein Paralle-

lo-

logram *FL*, der fürgegebenen recht-liniſchen Figur *ABCD* gleich groß zu machen, item, daß ſolches einem Winckel, dem fürgegebenen E gleich, habe.

Operatio.

Theile die Figur ABCD in beyde Triangel BAD und BCD. Dann formire [44. 1.] das Parallelogram FH = dem Triangel BAD, welches zugleich dem Winckel F mit E conform habe. Auf ſolche Art mache auf HI das Parallelogram IL = BCD. So wird FGLK das begehrte Parallelogram ſeyn.

Beweiß.

Weil das Parallelogram F [44. 1.] = dem Triangel BAD. auf ſolche Art auch das Pgr. IL = BCD. So iſt [2. ax. 1.] das Pgr. FL = der Figur ABCD.

Die 46. Propoſition.

Auf eine gegebene gerade Linie *AD* ein Qvadrat zu machen.

Operatio.

Stelle [11. 1.] AB und DC perpendicular auf AD. beyde = der AD, ziehe BC, ſo iſt es geſchehen.

Be-

Beweiß.

Weil AB und DC iede = AB, und auch die Winckel A und D gleich, ſo wird ebenfalls [33. 1.] BC der AB = und parallel, item, [34. 1.] der Winckel A = D und B = C, dieſ mnach alle 4. Winckel einander gleich ſeyn. Weßwegen [29. Def. 1.] ABCD ein Qvadrat.

Die 47. Propoſition.

Bey allen recht-wincklichten Triangeln (ABC) iſt das Qvadrat ſo auf die längſte Seite (BC) oder welche dem rechten Winckel unterzogen, gemachet wird, eben ſo groß, als die beyden Quadrata, ſo auf beyde Seiten AC und AB, welche dem rechten Winckel begreiffen, gemachet werden.

Operatio.

Ziehe AD, AE, CF, BI, item AM parallel mit CE.

Beweiß.

Der Winckel DBC iſt = [46. 1.] ABF, addire zu ieden dem Winckel ABC, ſo wird der Winckel ABD = FBC ſeyn. Es iſt auch AB = BF, und BD = BC, dahero der Triangel ABD

ABD [4. 1.] = FBC. Ferner iſt das Pgr. BM [41. 1.] = 2. Triangel ABD, und das Qvadrat oder Pgr. BG = 2. FBC (denn GC iſt FB parallel) dieſemnach iſt das Pgr. BM = dem Qvadrat BG. Auf dergleichen Art, iſt auch das Pgr. CM = dem Qvadrat CH, und folglich das Qvadrat BCDE = ABFG + ACIH.

Die 48. Propoſition.

Ein ieder Triangel ABC, an welchen auf die längſte Seite BC ein Qvadrat gemachet, ſo denen 2. andern Qvadraten zuſammen (welche auf die übrigen 2. Seiten AB und AC gemachet worden,) gleich iſt. Wird ein recht winckl ichter Triangel ſeyn.

Beweiß.

Iſt vice verſa vorhergehende 47. Propoſ. Denn ſo jenes nicht war wäre, könte dieſes auch nicht warhafft ſeyn.

Des Erſten Buchs Ende.

Das

Das Zweyte Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1.

Ein iedes recht wincklichtes Parallelogram ABCD iſt, von 2. rechten Linien AB, AD, die den rechten Winckel BAD begreiffen, beſchloſſen.

2. In einem ieden Parallelogram FHIK, wird allezeit ein Parallelogram, wodurch der Diameter HK gehet, mit denen zweyen Supplementen ein Gnomon oder Winckelhaacken genennet.

Alſo iſt *FE + EK + EI* ein *Gnomon.*

item, FE + EH + EI iſt auch ein *Gnomon.*

Die

Die 1. Propoſition.

Wenn 2. rechte Linien AB, AF gegeben, und die eine davon, als hier AB nach Gefallen, in etliche Theil zertheilet wird, ſo iſt die recht-wincklichte Figur der zwey gegebenen Linien FB gleich groß, denen recht-wincklichten Figuren zuſammen, ſo von der gantzen Linie AF, und denen Theilen der Linie AB nemlich AD, DE und EB gemachet werden.

Beweiß.

Dis iſt durch die Figur eine an ſich ſelbſt gantz klare Sache.

Die 2. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AC nachgefallen in 2. Theile AB und BC getheilt wird. Werden die Rectangula, von ieden Theil beſonders mit der gantzen AC beſchloſſen, zuſammen, eben ſo groß ſeyn, alſo das Qvadrat der gantzen Linie AC.

Beweiß.

Iſt gleich vorhergehender Prop. und demonſtriret auch ſolches die Figur ſelbſt.

Die

Die 3. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie A C nachgefallen, in 2. Theile AB und BC zertheilet wird. Iſt die recht-wincklichte Figur (AD) nemlich von der gantzen Linie AB und einem Theil BC beſchloſſen, eben ſo groß; Als die recht-wincklichte Figur (AE) von denen zweyen Theilen AB und BC, ſamt den Qvadrat (BD) des genommenen Theils BC.

Beweiß.

Diß bezeiget die Figur wieder ſelbſt, als eine gantz wahre Sache.

Die 4. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AC nachgefallen, (es ſey in gleiche oder ungleiche Theile) durchn Punct B in 2. Theile zertheilt wird. So iſt das Qvadrat der gantzen Linie AC eben ſo groß, als die Qvadrata derer Theile AB und BC, ſammt 2. recht-wincklichten Figuren, von AB und BC beſchloſſen.

Beweiß.

Aus der Figur iſt offenbar, daß die 2. Qvadrata von AB und BC, nemlich AD, und DE, ſammt denen beyden Rectang. von AB und BC beſchloſſen, nemlich FD und DC, (indem ſelbige das Qvadrat juſt ausfüllen,) zuſammen eben ſo groß als das Qvadrat AC.

In Zahlen.

Sey AB 10. BC 2. bringt zum Inhalt vor beyde Qvadrata. 100. und 4. und AB mit BC beſchloſſen, giebt 20. diß 2. mahl iſt 40. mit vorigen zuſammen 144. alſo gleich dem Inhalt des Qvadrats von AC 12. nehmlich auch 144.

Nota, hieraus entſtehet Radix Qvadrat zu extrahiren, und wird damit bewieſen. vide Arithm. Haupt-Schlüßel, p. 464.

Die 5. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AB in 2. gleiche Theile AC, CB, und auch in 2. ungleiche Theile AD, DB getheilet wird. So iſt das Rectang. der ungleichen Theile von AD und DB, mit dem Qvadrat der Differenz DC gleich, dem Qvadrat der halben Linie AC.

Be-

Beweiß.

Formire die Figur wie zu ſehen.

Es ſoll bewieſen werden, daß das Rectang. EB (von AD und DB beſchloſſen,) ſammt dem Quadrat EF (der Diff. DC) gleich: Dem Quadrat GC (der halben Linie AC.)

CH iſt = DE = AD. Und CB = AC = AG. Dahero [35.1.] GD = HB. Da nun [43.1.] CE = GE.

Alſo iſt HB + EC + EF. = GD + EC + EF = dem Quadrat GC. So zu beweiſen war.

In Zahlen.

AB ſey 20. und AD 6. kommt DB 14. und die Diff. DC 4. Dahero iſt das Rectangulum von AD und DB 84. mit dem Qvadrat von DC 16. alſo zuſammen 100 = dem Qvadrat von AC 100.

Die 6. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AB in 2. gleiche Theil getheilt in C, dann eine andere gerade Linie BE gerade angefüget wird. So iſt das Rectang. AH von der gantzen AE und der angefügten BE beſchloſſen, ſammt den Quadrat DK der halben Linie AB, gleich, dem Qvadrat CG ſo auf CE (als der hal-

ben Linie AB und dem angefügten BE) gemachet wird.

Beweiß.

Formire die Figur wie zu ſehen.

FE [43. 1.] iſt = BG. Und FB [35. 1.] = AF. und DK iſt das Quadrat von CB. Dahero FE + AF + □ DK = BG + FB (ſo = AF) + □ DK = dem □ CG.

In Zahlen.

AB ſey 8. und die angefügte BE 3. Dieſem nach iſt das Rect. AH 33. ſamt den □ DK 16. zuſammen 49. = dem Quadrat CG 49. (von CE.)

Die 7. Propoſition.

Wenn eine gerade Linie AC nach Gefallen in 2. Theile AB und BC zertheilt wird. So iſt das Quadrat der gantzen Linie AC, mit dem Quadrat des einem Theils BC zuſammen, gleich denen 2. Parallel. von der gantzen AC und gemeldten Theil BC, ſamt dem Quadrat des andern Theils AB.

Be-

Beweiß.

Formire die Figur, wie zu ſehen.

FE iſt [35. 1.] = BD = GD. Dahero das □ AD + □ BE = (2. Rectang. BD) FE + GD + □ AF.

In Zahlen.

AC ſey 11. und AB 6. ſo iſt BC 5. Das □ von AC 121 + □ BC 25, zuſammen 146. iſt = 2. Parallelogr. FE 55. GD 55. ſammt dem □ AF. 36. alſo auch 146. wie vorhero.

Die 8. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AC nach gefallen in 2. Theile AB und BC zertheilt wird. So ſeynd 4. Parallelogr. von der gantzen Linie AC und einem Theil derſelbigen AB beſchloſſen, ſamt dem Quadrat des andern Theils BC zuſammen ſo groß; Als das Quadrat, ſo von der gantzen Linie AC + dem erſtgemeldten Theil AB, beſchloſſen wird.

Beweiß.

Formire die Figur, wie zu ſehen.

Es iſt durch die Figur offenbar, das [35. 1.] die 4. gleich groſſe Rectang. (von AC und AB beſchloſſen,) AD, CK, FG und IH + den □ GD (von BC) = dem □ von AE.

In Zahlen.

AC ſey 12. AB 3. thut BC 9. Jedes Rectang. thut 36. diß 4. mahl 144 + □ von BC 81. zuſammen 225. ſo gleich dem Quadrat von AE (15.) nemlich auch 225.

Die 9. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AB, durch C in 2. gleiche, und auch durch D, in 2. ungleiche Theil getheilt wird. So ſeynd die 2. Quadrata von denen ungleichen Theilen, AD und DB zuſammen, 2. mal ſo groß, als das Quadrat der halben Linie CB, mit dem Quadrat des Unterſcheids CD.

Stelle CE perpendicular gleich lang AC. ziehe AE und EB, item, DF parallel CE, alſo auch GF parallel CD, letzlich noch AF.

Beweiß.

DF [48. 1.] iſt = DB, und FG = GE. Dahero das □ AF [47. 1.] = dem □ AD + □ DB. Ferner iſt auch [47. 1.] das □ AF = dem □ AE + □ EF, = 2 mahl das □ von

von AC und CD. (Denn [48. 1.] iſt das □ AE doppelt von □ AC oder CB, und EF doppelt von □ GF (oder CD) So zu beweiſen war.

In Zahlen.

AB ſey 14. und DB 4. Die 2. Quadrata von AD 10. und DB 4. thun zuſammen 116. doppelt ſo groß, als das □ von CB 7. und CD 3. nehmlich 58.

Die 10. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AC in 2. gleiche Theil in B zertheilt, auch eine andere Linie CD gerade dran gefüget wird. So iſt das Quadrat der gantzen Linie AD, ſammt dem Quadrat des Zuſatzes CD, 2. mahl ſo groß, als das Quadrat der halben Linie AC (nemlich von AB) ſamt dem Quadrat von BD (der halben Linie AC + dem Zuſatz CD.)

Beweiß.

Ziehe oder ſtelle BE perpendicular auf AC, gleich lang mit AB, formire das Rectang. BG, DF mache = CD, ziehe ſodann EF und AF.

Erſtlich, iſt DF = CD, und dahero das □ AF [47. 1.] = dem □ der gantzen Linie AD ſamt dem □ des Zuſatzes CD.

Zum andern, iſt EG = BD, alſo [48. 1.] das □ EF doppelt zum □ BD, auf dergleichen Art iſt auch das □ AE doppelt zum □ AB. Weiln nun wiederum das □ AF ebenfalls gleich [47. 1.] dem □ FE + □ AE.

So folget hieraus

Daß das □ der gantzen Linie AD, ſammt den □ des Zuſatzes CD (ſo laut oben = dem □ AF) doppelt von □ BD + □ von AB. ſeyn müße. So zu beweiſen war.

In Zahlen.

AC ſey 12. und CD 3. Dahero das □ AD 225 + □ CD 9. zuſammen 234. doppelt zum □ BC 36 + □ BD 81. zuſammen 117.

Die II. Propoſition.

Eine rechte Linie AB, alſo in 2. Theil zu theilen, daß das Parallelogram von der gantzen Linie AB und dem kleinern Theil GB beſchloſſen, gleich dem Quadrat des gröſſern Theils AG.

Operatio.

Auf AB formire das □ AC, theile AD durch E in 2. gleiche Theil, mache EF = EB, und DI = AF, formire das Rectang. IF, ſo iſt AG das große, und GB das kleinere Theil.

Be-

Beweiß.

Das Parallelogr. DH + □EA iſt [6. 2.] = dem □ EF = dem □EB, auch = [47. 1.] dem □ BA + □ EA. Dahero iſt DH = dem □AC. Subtrahire von beyden das Pgr. AI, ſo wird das □ AH = GC übrig bleiben, welches □ AH = AB mit BG beſchloſſen.

In Zahlen.

AB ſey 12. ſo iſt EA 6. alſo EB $\sqrt{180}$. Dieſemnach AF = AG $\sqrt{180} - 6$ = $7\frac{4164}{10000}$. und BG $18 - \sqrt{180} = 4.\frac{5836}{10000}$.

Die 12. Propoſition.

In allen ſtumpff-wincklichten Triangeln ABC, iſt das Quadrat der gröſten Seite AC, ſo dem ſtumpffen Winckel ABC unterzogen, gröſſer, als die 2. Quadrata der beyden andern Seiten AB und BC, um 2. Pgr. ſo gemacht von eine der beyden Seiten, als hier BC und der Linie BD, als welche BD die (aus A auf die erlängerte CB fallende) perpendicular AD hervor bringet.

Beweiß.

Das Quadrat CD iſt [4. 2.] = □CB + □BD + 2 Pgr. von CB und BD beſchloſſen. Ferner das □ AC [47. 1.] = dem □CD + □AD, alſo auch das □AC = AD□ + CB□ + BD□ + 2. Pgr. von CB und BD beſchloſſen. Da nun bey dieſen letztern □AD + □BD [47. 1.] = □AB. So iſt das □AC = □CB + □AB + 2. Pgr. von CB und BD. Und dahero □AC gegen □CB + □AB gröſſer, um 2. Pgr. von CB und BD.

In Zahlen.

Man laſſe AD 12. AC 20. und AB 15. ſeyn, ſo iſt CD 16. BD 9. und CB 7.

Dahero wird das □ AC 400. gleich ſeyn.

Dem Quadrat AB	225
+ □CB	49
+ 2. Pgr. von CB 7. und BD 9.	126
alſo auch .	400.

Die 13. Propoſition.

In allen ſcharff-wincklichten Triangeln ABC iſt das Quadrat einer Seiten AB, ſo dem ſcharffen Winckel ACB unterzogen, kleiner, als die 2. Quadrata, derer beyden andern 2. Seiten

AC

AC und BC, ſo dem ſcharffen Winckel begreiffen, umb 2. Pgr. von der einen Seite (worauff die perpend. Linie AD fället) als hier BC, und dann DC (als der Linie von der perpendicular- biß an ſcharffen Winckel) beſchloſſen.

Beweiß.

Das □ AC iſt [47.1.] = □ AD + □ DC, und □ BC + □ DC [7. 2.] = 2 Pgr. BC mit DC, + □ BD, addire mit beyderſeits wegnehmenden □ DC.

kommt

□ AC + □ BC = 2 Pgr. BC mit DC + □ BD + □ AD.

Nun iſt [47.1.]

□ AB = □ AD + □ BD, dahero durch Verwechſelung □ AC + □ BC = □ AB + 2 Pgr. BC mit DC.

Dahero beyde □ AC + □ BC gröſſer, gegen dem □ AB umb 2. Pgr. BC mit DC.

In Zahlen.

Man laſſe AB 13. AD 12. und DC 9. ſeyn, ſo kommt [47. 1.] BD 5. und AC 15. folglich BC 14.

Die

Dieſem nach wird das □ AC 225 + □ BC 196. zuſammen ſeyn 421.

Hiervon das □ AB 169. ſubtrahirt, bleibt übrig 252. vor beyde übertreffende Parallelogram BC 14 mit DC 9.

Die 14. Propoſition.

Ein Quadrat ML, einer ieden fürgegebenen rechtliniſchen Figur A gleich groß, zu machen.

Operatio.

Mache ein rectangulum DB [45. 1.] = groß der Figur A, erlängere DC, und mache CF = CB, theile DF in 2 gleiche Theil in G, und ziehe aus G in der Weite GD dem Circulbogen DHF, erlängere BC bis H, ſo wird HC eine Seite des begehrten Quadrats ML ſeyn.

Beweiß.

Die Figur A iſt [45. 1.] = DB = dem rectang. von DC mit CF. auch = [5. 2.] dem □ GF − □ GC. welches ebenfals [47. 1.] = dem □ HC oder □ ML.

In

In Zahlen.

Dieſe 14. Prop. iſt anders nichts, als eine iede Fläche in ein Qvadrat zu verwandeln, id eſt, ein Qvadrat mit einer ieden Fläche gleich groß, zu machen.

Man laſſe dahero die Fläche oder Figur A an Gröſſe oder Inhalt 48 seyn. Hieraus könte nun ein rectang. DB, von DC 12 lang, und CB 4. breit, formiret werden. Bey ſolcher Beſchaffenheit wäre HC das Medium proportionale zwiſchen 12 und 4 nemlich $\sqrt{48}$. vor eine Seite des □ MN. ſo mit der Fläche A gleiches Inhalts.

Des Zweyten Buchs Ende.

Das

Das Dritte Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1.

Gleiche Circkel ſeynd, ſo gleiche Diameter, oder von ihren Centro bis an die Circumferenz gleich groſſe rechte Linien G A und H D haben.

2. Eine rechte Linie E B, ſo dem Circkel in E berühret, wird geſaget; Wenn ſelbige gleichaus erlängert wird, dennoch die Circumferenz nicht durchſchneide.

Die Linie F G durchſchneidet dem Circkel oder deſſen Circumferenz.

3. Circkel D A C, A B E, (alſo auch F B G, A B E,) berühren einander, wenn ſie einander nicht durchſchneiden.

Die Circkel BFG, FGH, hingegen, durchſchneiden einander.

4. In einem Circkel ſtehen die Linien F E, K L gleich weit von Centro G, wenn die aus Centro darauf fallende perpendicular Linien G H und

und GN einander gleich. Je länger auch die perpendicular Linie GJ, ie weiter ſtehet auch die Linie BC von Centro ab.

5. Ein Circkelbogen (Segmentum) iſt, von einer geraden Linie AC, und einem Stück von der Circumferenz ABC beſchloſſen.

6. Der Winckel eines Circkelbogens iſt, von der geraden Linie AC und Bogen AB beſchloſſen, nemlich: Der Winckel BAC.

7. Eines Circkelſtücks (Segments) Winckel iſt ABC, da von der Circumferenz aus B an die End-Puncten A,C, die Linien BA, BC, gezogen werden.

8. Und wenn die Linien BA und BC, die Circumferenz ADC faſſen, ſagt man, daß der Winckel ABC auf der Circumferenz ADC ſtehet.

9. Ein Sector oder Circkelſchnit iſt ADB, von 2 halben Diametern AD und BD, und einem Theil der Circumferenz AB beſchloſſen.

10. Gleichförmige Circkelbogen ſeynd, da in gleichen Circkeln, die Winckel ABC und DEF gleich.

Die

Die 1. Propoſition.

Eines gegebenen Circkels Centrum zu-finden.

Ziehe nach Gefallen AC, dieſe zertheile [10. 1.] Winckel recht durch BD in 2. gleiche Theil. Ferner theile auch alſo BD in 2 gleiche Theil in F, ſo wird F das begehrte Centrum ſeyn.

Beweiß.

Geſetzt! daß F nicht das Centrum, ſondern G ſolches wäre. Ziehe GA, GE, GC. So müſte GA [15. def. 1.] = GC ſeyn. Auch da AE = EC, würde [8. 1.] der Winckel GEA = GEC und folglich [10. def. 1.] ieder ein rechter Winckel ſeyn, welches doch ungereimt. Iſt alſo F und kein anderer Punct das begehrte Centrum. So zubeweiſen war.

Die 2. Propoſition.

Wenn in eines Circkels Circumferenz nach gefallen 2 Puncta A und B genommen, und mit einer rechten Linie AB zuſammen gezogen werden. So wird ſolche Linie AB innerhalb des Circkels fallen.

Be-

Beweiß.

Dis iſt eine an ſich ſelbſt Vernunfft-mäßige gantz klare Sache.

Die 3. Propoſition.

Wenn in einem Circkel, eine rechte Linie B D durchs Centrum E gezogen, eine andere rechte Linie A C (die nicht durchs Centrum gehet) in 2 gleiche Theil zertheilt, ſo machet ſolches 2 rechte Winckel E F A und E F C.

Und ſo die Zertheilung rechte Winckel machet, wird auch allezeit die Linie A C durch B D in 2 gleiche Theil zertheilet.

Beweiß.

1. Ziehe AE und CE, weil nun AF = FC und [15. def. 1.] EA = EC, anbey EF gemein, ſo iſt der Winckel EFA [8. 1.] = EFC, folglich ſeynd [10. def. 1.] beyde rechte Winckel.

2. Ebenermaſſen vice verſa, wenn die Zertheilung gleiche Winckel AFE und CFE machet, ſo wird auch AF = FC ſeyn.

Die 4. Propoſition.

Zwey rechte Linien AB und CD, in einem Circkel einander durchſchneidende, von

welchen aber keine durchs Centrum gehet, können keineswegeſ einander in 2 gleiche Theil zerſchneiden.

Beweiß.

Von Centro E ziehe EF. Geſetzt! daß beyde Linien einander bey F in 2 gleiche Theil zerſchnitten, müſten dieſemnach beyde Winckel [3. 3.] EFB und EFD ieder ein rechter Winckel, und alſo ein ander gleich ſeyn, ſo aber [9. ax. 1.] ungereimt.

Die 5. Propoſition.

Zwey Circkel, die einander in B und C durchſchneiden, können nicht ein Centrum E gemein haben.

Beweiß.

Geſetzt! daß E das algemeine Centrum wäre. Dahero ſey gezogen EB und EA, dieſemnach müſte DE [15. def. 1.] = EB = EA ſeyn, ſo aber [9. ax. 1.] ungereimt.

Die 6. Propoſition.

Zwey Circkel ein ander inwendig in B anrührende, können nicht ein Centrum F gemein haben.

Be-

Beweiß.

Wenn F das gemeine Centrum wäre, als ſey gezogen FB und FA, dahero müſte [15. def. 1.] FD = FB = FA ſeyn, ſo aber [9. ax. 1.] ungereimt.

Die 7. Propoſition.

Wenn in einem Circkel ein Punct G nach gefallen genommen wird, der nicht des Circkels Centrum iſt, und von ſolchen Punct etliche gerade Linien an die Circumferenz gezogen werden, iſt 1) diejenige (GA) ſo durchs Centrum F gehet, die Längſte. 2) Die Erfüllung (GB) des Diametri aber, die kürtzeſte. Und alſo ie näher ſolche GA kommen, ie länger ſie seynd. 3) Es mögen auch nicht mehr als 2 gleiche Linien von ſolchen Punct G (nemlich wie etwa GE und GH) zu beyden Seiten, bis an die Circumferenz gezogen werden.

Beweiß.

Ziehe FC, FD und FE, dann mache dem Winckel BFH = BFE.

3. Sätze ſind hier zubeweiſen, als:

1. FG + FC (ſo GA) iſt [20. 1.] gröſſer, als GC.

2. FG iſt beyden Triangeln CFG und DFG gemein, davon FC [15. def. 1.] = FD, und der Winckel GFC iſt [9. ax. 1.] gröſſer, als GFD. Dahero auch GC [24. 1.] gröſſer, als GD. Auf ſolche Art iſt auch GE gröſſer als GB, dann FB (ſo FE) iſt [22. 1.] kleiner, als GE + GF, von ieden FG ſubtr. reſtirt BG [9. ax. 1.] kleiner, als EG.

3. FG iſt gemein, und FE = FH. Auch der Winckel BFH = BFE. Dahero GE [4. 1] = GH.

Daß aber auch ferner, keine andere gerade Linie der GE und GH gleich seyn könne, iſt albereit itzo durch dem 2 Satz bewieſen.

Die 8. Propoſition.

Wenn auſſerhalb eines Circkels nach Gefallen ein Punct A genommen, und davon in den Circkel etliche Linien AJ, AH, AG, AF, gezogen werden, deren eine AJ durchs Centrum K gehet. So iſt AJ, als die durchs Centrum gehet, die Längſte, dieſe Linien werden ſo dann immer kürtzer, bis AB die Kürtzeſte wird, als welche von A bis an den Diameter BJ gehet.

Es können auch von A, mehr nicht zu beyden Seiten, als nur 2 gleiche Linien,

ſo

ſo wohl in den Circkel bis an die Circumferenz, oder aber bis auſſerhalb an die Circumferenz gezogen werden.

Beweiß.

Von Centro K, ziehe KH, KG, KF, dann KC, KD und KE. Auch mache dem Winckel AKL = dem Winckel AKC.

1. Satz, AJ (ſo AK + KH) iſt gröſſer [20. 1.] als AH. AK iſt gemein, und KH = KG, ferner der Winckel AKH gröſſer als AKG. Dahero auch AH [24. 1.] gröſſer als AG. folglich AJ unter dieſen allen die Längſte.

2. KA iſt [20. 1.] kleiner als KC + CA, Davon ſubtrahire KC und KB, reſtirt [9. ax. 1.] AB kleiner als AC. Folglich AB unter allen die kürzeſte.

3. KA iſt gemein, und KL = KC, item, der Winckel AKL = AKC, Dahero auch LA [4. 1.] = CA. Daß auch von A zu beyden Seiten nur 2 gleiche Linien, ſo wohl in- als auſſerhalb an die Circumferenz mögen gezogen werden, iſt durch vorhergehenden 1 und 2 Satz offenbar.

Die 9. Propoſition.

Wenn in einem Circkel von einem Punct A, mehr dann 2 gleiche Linien, als hier AB, AC, AK &c. bis an die Circumferenz können gezogen werden, ſo wird

ſolcher Punct A des Circkels Centrum ſeyn.

Beweiß.

Weil [7. 3.] von keinen Punct, (ſo auſſerhalb des Circkels Centrum) mehr denn 2 gleiche Linien an die Circumferenz, hier aber mehr können gezogen werden, als iſt dieſemnach auch [15. def. 1.] A das Centrum.

Die 10. Propoſition.

Ein Circkel kan dem andern, mehr nicht, dann in 2 Orten durchſchneiden.

Beweiß.

Geſetzt! daß ſolche Circkel einander in 3 Orten J, K und L durchſchneiden könten. Als ziehe JK und KL, dieſe beyde iede in 2 gleiche Theil zertheilt, in M und N, durch die Linien MC und NH, welche einander [1. 3.] in O durchſchneiden. Dahero O das Centrum beyder Circkel wäre, ſo aber [5. 3.] ungereimt.

Die 11. Propoſition.

Wenn 2 Circkel einander inwendig berühren, und man eine gerade Linie ABC durch beyde Centra A und B ziehet, ſo wird ſolche Linie dieſe 2 Circkel in dem Punct C, da ſie einander berühren, durchſchneiden.

Be-

Beweiß.

Geſetzt! die geſagte Linie ABC, fiele nicht in dem Berührungs-Punct C, ſondern etwa ſeitwerts in D. Dieſemnach müſte BD [7. 3.] = BC, und ABED = AC ſeyn, welches aber ungereimt.

Die 12. Propoſition.

Wenn 2 Circkel einander von auſſen in A berühren, und deren beyde Centra (B und C) mit einer geraden Linie zuſammen gezogen werden, ſo wird dieſe Linie durch dem Anrührungs-Punct A gehen.

Beweiß.

Wenn es nicht were, ſo geſchehe es anders wo, zum Ex. in D und E. Weiln nun BA [15. def. 1.] = BD, So müſte CED [8. 3.] = CA ſeyn. Welches doch wie klärlich zuſehen ungereimt ſeyn ſolte.

Die 13. Propoſition.

Ein ieder Circkel berühret einen andern Circul nur in einem Punct, es geſchehe nun in- oder auswendig.

1. Beweiß.

Daß der kleinere Circul dem gröſſern inwen-

dig nur in einem Punct A berühren kan, und die Linie durch beyde Centra B und C gezogen, durch n Punct A gehe, iſt albereit mit vorhergehender 11. Prop. bewieſen.

2. Beweiß.

Daß auch ein Circkel von auſſen einen andern, nicht in zweyen Puncten D und E berühren kön̄ne, iſt erwieſen, durch vorherg. 12. Prop.

Die 14. Propoſition.

Gleich lange gerade Linien AB und DE, ſtehen von Centro C in gleicher Weite ab. Dahero auch die geraden Linien, ſo von Centro gleich weit abſtehen, einander gleich ſeynd.

Beweiß.

1. Satz. Man ziehe aus̄ Centro C, beyde CF und CG perpendicular auf AB und DE. So wird AB und DE iede beſondern [3.3.] in 2. gleiche Theil zertheilet. item, der Winckel AFC und DGC ieder ein rechter Winckel seyn. Auch iſt AC [15. def. 1.] = DC ſubtrahire dann das □ AF, von □ AC, ingleichen das □ DG von □ DC. So werden die reſtirende [3. ax. 1.] FC und CG einander gleich ſeyn.

2. Satz. Alſo werden auch vice verſa, die geraden Linien, ſo gleich weit von Centro abſtehen, einander gleich ſeyn.

Die

Die 15. Propoſition.

In einem ieden Circkel, iſt unter allen rechten Linien der Diameter BC die långſte. So dann die nechſte dabey DE, allezeit långer, als die drauf folgende FG, und ſo fort.

Beweiß.

Dis iſt zwar an ſich ſelbſt klar genug. Solches iedoch ebenfals zu beweiſen. So iſt AD + AE [15. def. 1.] = BC, und dahero [20. 1.] DE kleiner als BC. item, weil der Winckel DAE gröſſer als der Winckel FAG. So iſt auch DE [24. 1.] gröſſer als FG, &c.

Die 16. Propoſition.

So man von eines Circuls Diametro AC åuſerſten Punct C, eine Linie CD perpendicular ziehet. So wird 1) ſolche Linie CD auſſerhalb des Circkels fallen. 2) Kan keine gerade Linie zum Ex. CF zwiſchen die Circumferenz EC und der geraden Linie CD gezogen werden 3) Iſt der Winckel ECB gröſſer als einiger ſcharffer Winckel (zuverſtehen, der kleiner als ein rechter Winckel.) Und letzlich 4) der Winckel ECD kleiner, als irgend ein rechtliniſcher Winckel.

Beweiß.

1. Satz. Man ziehe nach Belieben aus B, auf die perpendicular CD die Linie BG. Dieſemnach wird ie und allezeit die Linie BG, ſo nahe man ſelbige auch nach C zunehme (weil ſolche in dem Triangel BGC, den rechten Winckel, als dem gröſten Winckel in ſolchen Triangel, unterſpannet) gröſſer [18. 1.] als BC oder BH ſeyn. Folglich alle Puncta, zwiſchen G und C, auſſerhalb des Circkels fallen.

2. Satz. Dieſer wird durch beyde folgende Sätze mit erwieſen.

3. Satz. Wolte man ſagen, der Winckel ECB könte was kleiner als ein rechter Winckel oder unter 90. Grad, zum Ex. etwa 89. Grad 59. Min. 59. Secunden 59. Tertien halten. So iſt hingegen vielmehr war, daß ſolcher auch 89. Grad 59. Min. 59. Sec. 59. Tert. 59. Qvarten &c. u. alſo unendlich hinaus noch wird drüber, niemaln aber völlig 90. Grad halten. Und alſo muß dieſe ſubtilität nur in Sinn begriffen werden, weiln man ſolches anders durch Linien nicht wohl zu beweiſen vermag.

4. Satz: Gleichwie nun itzt beyn 3ten Satz erwehnet und bewieſen worden, daß der Winckel ECB zwar kleiner als ein rechter Winckel, iedoch aber deſſen warhaffte Gröſſe in Ewigkeit nicht kan angegeben werden. Alſo iſt hier Gegentheils ECD zwar ein rechtliniſcher Winckel (gleich vori-

vorigen, wieder aus einer geraden Linie DC, und krummen Linie EC beſtehende) deſſen Gröſſe zwar wahrhafft etwas, iedoch aber auch ſo klein, daß ſelbiger, man gebe ihm auch ſo klein an, als nur immer möglich, dennoch allezeit weit kleiner ſeyn wird.

Und alſo folgt: Daß auch zwiſchen ſolchen kleinen Winckel ECD (der wohl etwas, iedoch auch nichts iſt,) keine gerade Linie FC kan gezogen werden, weiln ſelbige die krumme Linie oder Circumferenz EC allezeit durchſchneiden würde.

Anhang.

Hieraus folgt! daß die Perpendicular-Linie DC erlängert, oder aber eine iede andere gerade Linie dem Circkel auſſerhalb nur in einem Punct C anrühre.

Nota, Dieſe 16. Prop. Euclidis könte man bey nahe nennen, eine Subtilitæt über alle Subtilitæten, weil ſolche ſo zu ſagen das Medium zwiſchen Etwas und Nichts enthält.

Die 17. Propoſition.

So auſſerhalb eines Circkels ein Punct A gegeben wird. Von ſolchen eine rechte Linie AB zu ziehen, welche dem Circul in B berühret.

Ope-

Operatio.

Auſn Centro C in der Weite CA beſchreibe einen andern Circul, ziehe CA. Beyn Durchſchnitt D, ſtelle DE perpendicular auf AC. Dann ziehe EC, ſo wird B der Anrührungs-Punct ſeyn, wohin dann die begehrte AB zu ziehen.

Beweiß.

CD iſt = CB, und CA = CE, ingleichen der Winckel C commun. Dahero wird [4. 1.] der Winckel CBA = CDE, und demnach CBA auch ein rechter Winckel ſeyn. Folglich AB [16. 3.] dem Circul in B berühren.

Die 18. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AB einen Circkel in C berühret, und man aus dem Centro D die Linie DC ziehet, ſo wird DC auf AB perpendicular fallen.

Beweiß.

Weil die Linie AC den Diametrum EC am Ende C berühret, als wird [16. 3.] DCA ein rechter Winckel, und folglich DC auf AC perpendicular ſtehen.

Die 19. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AB einen Circul berühret, und man von Anrührungs-

rungs=Punct C eine perpendicular-Linie CD ziehet, ſo wird in ſolcher perpendicular-Linie, des Circkels Centrum D ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt durch vorhergehende Propoſition gnugſam erwieſen.

Die 20. Propoſition.

In allen Circuln ſeynd die Winckel ausn Centro A, auf ein Theil BC (der Circumferenz) gezogen, doppelt ſo groß, als diejenigen, ſo von ſolchen Theil BC die Circumferenz (übern Centro) berühren.

Beweiß.

1. Satz. Da der Winckel BDC ausn Diametro DC formiret worden. Der Winckel ADB [5. 1.] iſt = DBA, auch beyde [32. 1.] = dem Winckel BAC. Dahero BDC die Helffte des Winckels BAC

2. Satz. Da der Winckel BEC nicht ausn Diametro formiret worden. Der Winckel FAC [32. 1.] iſt = 2. AEC, und der Winckel FAB = 2. AEB. Subtrahire AEB von AEC, und FAB von FAC, ſo reſtirt [3. ax. 1.] der Winckel BEC = die Helffte des Winckels BAC.

Die

Die 21. Propoſition.

In einem Circkel, ſeynd die Winckel, ſo auf einen gleichen Theil der Circumferenz ſtehen, einander gleich.

Beweiß.

1. Satz. Dis iſt allbereit durch vorhergehende 20. Propoſition (woſelbſt das Segmentum circuli BFDEC, gröſſer als ein halber Circul,) bewieſen.

2. Satz. Da aber das Segmentum circuli kleiner, als ein halber Circul, zum Ex. hier ABCD. Iſt der Winckel CED [15. 1.] = AEB. und der Winckel CDB [20. 3.] = CAB. Dahero auch derer beyden Triangel übrige Winckel [32. 1.] ABE und ECB einander gleich.

Die 22. Propoſition.

Bey allen recht-liniſchen 4.eckichten Figuren, ſo in einem Circkel eingeſchrieben werden, ſeynd ie 2. Winckel, ſo einander gleichüber ſtehen, zuſammen genommen, zwey rechten Winckeln gleich.

Beweiß.

Der Winckel DBC iſt [21. 3.] = DAC, item

item, DCA = DBA. Dahero DCA + DCA = ABC. Zu ſolchen Winckel ABC addire ADC, ſo iſt der Winckel ABC + ADC [32. 1.] 2. rechten Winckeln gleich.

Auf ſolche Art wird auch bewieſen, daß der Winckel BCD + BAD 2. rechten Winckeln gleich.

Die 23. Propoſition.

Zwey gleich groß und gleichförmige Circul-Bögen, können auf eine rechte Linie, nicht gezogen werden.

Beweiß.

Wenn es möglich, ſo beſchreibe man auf AB einem andern Circul-Bogen ACB. Dieſem nach müſte der Winckel ADB [10. Def. 3.] = ACB ſeyn, welches aber ungereimt.

Die 24. Propoſition.

Gleichförmige Circkel-Bögen ABC und DEF, ſo auf gleich geraden Linien AC und DF ſtehen, ſeynd von gleicher Gröſſe.

Beweiß.

Dis iſt durch vorhergehende 23. Propoſition gnüglich erwieſen.

Die

Die 25. Propoſition.

Ein vorgegebenes Circulſtück ABBC, in ſeine gäntzliche Rundung zu bringen.

Operatio.

Ziehe nach Belieben AB und BC, dieſe beyde zertheile iede rectangulatim, welche einander in D durchſchneiden, ſo iſt dann D das Centrum des begehrten gantzen Circkels.

Beweiß.

Es iſt des gantzen Circuls Centrum [1. 3.] ſo wohl in der Linie ED als FD, und alſo folglich in dem (beyden gemeinſchafftlichen) Punct D enthalten.

Die 26. Propoſition.

Wenn in gleichen Circuln gleiche Winckel ſtehen, es ſey ausn Centro, als ABC = DEF, oder aber von der Circumferenz, als AGC = DHF, ſo werden ſie auch auf gleichen Theilen (AC und DF) der Circumferenz ſtehen.

Beweiß.

Diß iſt durch vorhergehende 20. Propoſition gnugſam bekandt worden und bewieſen.

Die

Die 27. Propoſition.

Die Winckel, welche in gleichen Circuln, auf gleichen Theilen der Circumferenz ſtehen, man nehme ſelbige biß ans Centrum, oder an die Circumferenz, die ſeynd einander gleich.

Beweiß.

Diß iſt vorhergehender 26. Propoſition gäntz conform, und dahero durch ſelbige und der 20. Prop. gnüglich bewieſen.

Die 28. Propoſition.

In gleichen Circkeln werden durch gleiche rechte Linien AB und CD, auch gleiche Theile oder Circulſtücken abgeſchnitten: nemlich, das gröſſere Stück AEB = dem gröſſern CFD. wie auch das kleinere AGB = dem kleinern CHD.

Beweiß.

Der Winckel AIB iſt = [26. 3.] dem Winckel CKD. Dahero auch das Circulſtück AGB = CHD. Folglich auch AEB [3. ax. 1.] = CFD.

Die 29. Propoſition.

In gleichen Circuln werden der Cir-

cumferenz gleiche Theile, mit gleich rechten Linien unterzogen.

Beweiß.

Diß iſt eben vorherg. 28. Propoſition und dahero zur gnüge bewieſen.

Die 30. Propoſition.

Ein Circul-Segment ABC, in 2. gleiche Theil zu theilen.

Operatio.

Man ziehe AC, und zertheile ſolche AC [10. 1.] in 2. gleiche Theile, durch BD, ſo wird hierdurch das Circul-Segment in 2. gleiche Theil zertheilet ſeyn.

Beweiß.

Weil AD = DC, und BD perpend. mitten auf AC, als wird auch AB [4. 1.] = BC, und folglich [28. 3.] der Bogen AB dem Bogen BC gleich, und die verlangte Theilung richtig geſchehen ſeyn.

Die 31. Propoſition.

In allen halben Circuln iſt 1) der Winckel ABC, (wohin er auch biß an die Circumferenz gezogen wird,) ein rechter Winckel. 2) Dahingegen iſt der

Win-

Winckel BAC, als welcher in einem gröſſern Segment BADC, ſich befindet, kleiner als ein rechter Winckel. 3) Der Winckel BEC aber, welcher in einem kleinern Segment, als ein halber Circul ſtehet, iſt gröſſer als ein rechter Winckel. 4) Desgleichen iſt der Winckel eines gröſſern Segments ABE, (von der Linie AB und der Circumferenz) gröſſer als ein rechter Winckel. 5) Nicht weniger der Winckel EBC eines kleinern Segments auch kleiner als ein rechter Winckel.

Beweiß.

Erlängere AB nach F, und ziehe aus Centro G die Linie GB.

1. Satz. Der Winckel GBC iſt = GCB alſo auch GAB = GBA; folglich der Winckel ABC = GCB + GBA. Es iſt aber auch [32. 1.] CBF = denen beyden inwendigen Winckeln A + C. Dahero auch = dem Winckel ABC; weßwegen [10. Def. 1.] ABC ein rechter Winckel.

2. Satz. Der Winckel BAC iſt [32. 1.] kleiner als der rechte Winckel CBF, da hingegen

3. Satz. Der Winckel BEC [22. 3.] gröſſer als ein rechter Winckel.

4. Satz. Weil ABC ein rechter Winckel, ſo iſt ABE gröſſer als ein rechter Winckel.

5. Satz. Weil CBF ein rechter Winckel, ſo iſt EBC nur ein Theil davon, und dahero ein ſcharffer Winckel.

Die 32. Propoſition.

Wenn man von einer rechten Linie AB, die einen Circul berühret, von Anrührungs-Punct C nach Belieben eine gerade Linie CD in Circkel ziehet. So wird der Winckel ACD dem Winckel DFC des dahinterſtehenden Circulſtücks, alſo auch der Winckel DCB = DEC ſeyn.

Beweiß.

Stelle auf AB in C die perpend. CG, und ziehe DG.

CG wird [19. 3.] der Diameter, und der Winckel CDG [31. 3.] recht ſeyn. Subtrahire dem Winckel GCD von GCA, reſtirt ACD = CGD = [21. 3.] DFC.

Weiln nun der Winckel ACD = DFC, ſo iſt [22. 3.] DEC auch = DCB. (angeſehen ein ieder der Reſt von 2. rechten Winckeln iſt.)

Die

Die 33. Propoſition.

Auf eine gegebene gerade Linie AB dasjenige Circul-Segmentum zu beſchreiben, in welchen ein recht-liniſcher Winckel, dem fürgegebenen CDE gleich, ſtehen möge.

Operatio.

Von Punct A formire den Winckel BAF [23. 1.] = CDE. auf FA ſtelle in A die perpend. Linie AG, Ferner AB [10. 1.] halb getheilt, ſo wird die Theilungs-Linie, die perpend. AG in H zerſchneiden, welcher Punct H des Circkels Centrum iſt. Solchen, und dann auch BI und AI gezogen.

Beweiß.

Der Winckel FAB iſt gleich gemacht, dem Winckel CDE. Dahero auch [32. 3.] der Winckel BIA = dem Winckel FAB. So zu beweiſen war.

Die 34. Propoſition.

Von einem fürgegebenen Circul, ein Circul Segment oder Stück abzuſchneiden, in welchen ein recht-liniſcher Winckel BIA, einem fürgegebenen CDE gleich, ſtehen mag.

Operatio.

Hierzu gebrauche vorhergehende Figur.

Ziehe an dem Circul die Linie FA, welche dem Circkel in A berühret. Aus A ziehe die Linie AB alſo: Daß der Winckel FAB = werde dem fürgegebenen CDE. Die Linie AB ſchneidet dann das begehrte Segmentum BGIA abe.

Beweiß.

Iſt wie die Figur und Operatio zeiget, vice verſa vorherg. 33. Prop. und alſo daſelbſt ſchon bewieſen.

Die 35. Propoſition.

Wenn in einem Circul (wie es auch geſchehe, von der Circumferenz biß wieder zur Circumferenz) zwey gerade Linien einander durchſchneiden, ſo iſt das Rectangulum von denen beyden Theilen der einen Linie, gleich dem Rectangulo derer beyden Theile, der andern Linie.

Erklärung und Beweiß.

Viererley iſt hier zu beweiſen, als:

1. Satz. Wenn beyde Linien AB und DC jede der Diameter, und einander in Centro E durchſchneiden, braucht ſolches keines Beweiſes, ſondern iſt allzuklar und warhafft.

2. Satz. Iſt die eine Linie der Diameter FG, welche die andere HI bey K in 2. gleiche Theil zer-

zertheilt. So geſchiehet ſolches bey K [3. 3.] Winckel-recht. Nun iſt das Rectang. von FK mit KG + □ LK [5. 2.] = dem □ LG oder LH. So iſt auch das □ LK + □ KH [47. 1.] = dem □ LH. Man ſubtrahire dahero das commune □ LK, ſo wird das Rectangulum FK mit KG = dem □ HK übrig bleiben.

3. Satz. Wenn die eine Linie der Diameter HC, ſo eine andere Linie DE bey F, in ungleiche Theile DF und FE zertheilet.

Ziehe BG perpendicular auf DE, ferner BE gezogen. Nun iſt (1) das Rectang. HF mit FC + □ BF [5. 2.] = dem □ BC oder BE. Und (2) das Rectang. DF mit FE + □ GF [5. 2.] = dem □ GE, welch □ GE + □ BG auch [47. 1.] = dem □ BE, (dahero das □ GF + □ BG gleich dem □ BF) von vorhergehenden beyden, ieden beſondern ſubtrahirt, ſo verbleibet [3. ax. 1.] das Rectang. HF mit FC = dem Rectang. DF mit FE.

4. Satz. Da von beyden Linien AC und DE keine der Diameter iſt. Man ziehe von Durchſchnitt B, durchs Centrum H den Diameter FG. Nun iſt allbereit ietzt vorher beyn 3. Satz bewieſen, daß das Rectangulum FB mit BG = dem Rect. AB mit BC. Auf ſolche Art iſt auch das Rectang. FB mit BG = dem Rectang. EB mit BD. Dahero folglich [1. ax. 1.] auch das Rectang. von AB mit BG = dem Rectang. EB mit BD.

Nota, das Wörtlein Mit zwiſchen denen Buchſtaben, iſt künfftig hin, vor multipliciren zu verſtehen. Zum Ex. EB mit BD, bedeutet EB mit BD multiplicirt &c.

In Zahlen.

1. Satz. AB ſey 40. dahero AE 20. alſo AE mit EB, 400. = CE mit ED auch 400.

2. Satz FG ſey 40. und KG 8. kommt LG 20. und LK 12. [47. 1.] HK 16. Alſo FK 32. mit KG 8. mult. 256. = HK 16. mit KI 16. mult. ebenfalls 256.

3. Satz. HC bleibe 40. FC ſey 7. DF 21. kommt [13. 2.] BG 12. und GF 5. folglich [3. 3.] DG 16. dahero FE 11. Alſo das Rect. HF 33. mit FC 7. mult. 231. = dem Rect. DF 21. mit FE 11. mult. auch 231.

4. Satz. DB ſey 25. und BE 7. BC 10. und der Diameter FG bleibe 40. komt [12. 2.] vor AB. $17\frac{1}{2}$. Daß alſo

das Rectang. DB 25. mit BE 7. = 175.

das Rect. AB $17\frac{1}{2}$. mit BC 10. auch = 175.

Die 36. Propoſition.

Wenn nach Gefallen auſſerhalb eines Circkels ein Punct A genommen, und von ſolchen 2. rechte Linien alſo gezogen werden, daß die eine AB des Circuls Circumferenz bey C durchſchneidet, die

die andere AD aber dem Circkel bey D berühret. So wird das Rectangulum von der gantzen Linie AB und AC beſchloſſen, gleich seyn, dem Qvadrat der anrührenden Linie AD.

Beweiß.

1. Satz. Man ziehe AG durchs Centrum F. ſo wird das Rect. von AG mit AE = seyn dem □ AD. (weil das Rect. von AG mit AE + □ FE [6. 2.] = den □ AF.) Und der Winckel ADF [18. 3.] recht. Dahero das □ FD + □ AD [47. 1.] = dem □ AF.

Nun ſubtrahire beyderſeits das commune □ FD, welches = dem □ FE. So wird [3. ax. 1.] das Rectang. AG mit AE = dem □ AD übrig bleiben.

2. Satz. Stelle FH perpendicular auf BC, und ziehe FC.

Nun obſervire vors erſte, wie [47. 1.] das □ HC + □ FH = dem □ FC oder FD.

Ferner, wie das Rectang. AB mit AC + □ HC [6. 2.] = dem □ AH.

Dahero auch [47. 1.] das Rectang. AB mit AC + □ HC + □ FH = dem □ AF. Von dieſen beyden letztern Quantitæten nun die commune Quadrata FC und FD ſubtrahiret. So wird einerſeits das Rectang. AB mit AC [3. ax. 1.] dem anderſeits reſtirenden □ AD gleich übrig bleiben.

In Zahlen.

AC ſey 16. BC 20. der Diameter GE 36. kommt [47. 1.] vor FH $\sqrt{224}$.

Da nun HA 26. kommt [47. 1.] vor AF 30. dahero iſt EA 12. Und dieweiln FD 18. bringt [47. 1.] AD 24. deſſen □ iſt 576.
So viel iſt dann auch das Rect. von
AG 48. mit AE 12. . . = 576.
Ebenfalls das Rect. AB 36. mit
AC 16. . . = 576.

Die 37. Propoſition.

Wenn auſſerhalb eines Circuls, ein Punct A genommen, und von ſolchen zwey Linien gezogen werden, da die eine AB dem Circkel in C durchſchneidet, die andere AD aber dem Circkel in D berůhret, alſo: Daß das Quadrat dieſer berůhrenden Linie AD gleich dem Rectangulo, von der gantzen durchſchneidenden Linie AB und dem Theil auſſerhalb des Circkels AC beſchloſſen. So wird die Linie AD dem Circkel in D berůhren.

Beweiß.

Man beſehe hierůber wiederum vorhergehende 36. Prop. ſamt deren Figur und Beweiß, ſo wird es dieſer Prop. in allen gleich befunden werden, und dahero keiner a parten Demonſtration bedůrfftig ſeyn.

Des dritten Buchs Ende.

Das

Das Vierdte Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1.

EIne iede recht-liniſche Figur, iſt einer andern recht-liniſchen Figur recht eingeſchrieben: Wenn die Winckel der innern Figur, die Seiten der äuſſern Figur berühren.

Alſo iſt der Triangel EFG, dem Quadrat ABCD recht eingeſchrieben.

2. Ebener maßen iſt eine iede recht-liniſche Figur, umb die andere recht beſchrieben: Wenn iede Seite der äuſern Figur, die Winckel der innern Figur berühren.

Alſo iſt das Quadrat ABCD umb den Triangel EFG, recht beſchrieben.

3. Eine iede recht-liniſche Figur, wird in einem Circul recht eingeſchrieben, wenn ſolcher Figur ihre Winckel, des Circuls Circumferenz anrühren.

Alſo iſt das 5. Eck ABCDE, dem Circul recht eingeſchrieben.

4. Ebe-

4. Ebener maßen wird eine iede gerad-liniſche Figur, umb einen Circul recht beſchrieben: Wenn alle Seiten der Figur, des Circuls Circumferenz berühren,

Alſo iſt das Quadrat ABCD, recht umb den Circul beſchrieben.

5. Desgleichen wird ein Circul in eine geradliniſche Figur recht eingeſchrieben: Wenn des Circuls Circumferenz alle Seiten der geradliniſchen Figur berühret.

Alſo iſt der Circul recht in das Quadrat ABCD, eingeſchrieben.

6. Ein Circul wird umb eine rechtliniſche Figur recht beſchrieben: Wenn deſſen Circumferenz alle Winckel oder Ecken der Figur berühret.

Alſo iſt der Circul recht um das 5. Eck ABCDE beſchrieben.

7. In einem Circul, iſt eine iede gerade Linie recht eingeſtelt: Wenn beyde Enden die Circumferenz berühren.

Alſo iſt die Linie AE recht in dem Circul eingeſtelt, weil ſolcher Linie beyde Enden oder End-Puncta A und E die Circumferenz berühren.

Die 1. Propoſition.

In einen gegebenen Circul, eine rechte Linie, der fürgegebenen AB gleich, zuſtellen. (Die iedoch nicht länger als der Diameter ſeyn muß.)

Operatio.

In der Weite AB, beſchreibe aus C dem Bogen DE. So wird CE die begehrte eingeſchriebene Linie ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt eine an ſich ſelbſt klare Sache.

Die 2. Propoſition.

In einen gegebenen Circul, einen Triangel einzuſchreiben, deſſen 3. Winckel mit einen fürgegeben Triangel ABC überein kommen (oder der eingeſchriebene Triangel, dem Triangel ABC gleichförmig werde.)

Operatio.

Ziehe [17. 3.] die Anrührungs-Linie DEF. Von Anrührungs-Punct E formire [23. 1.] dem Winckel DEG = dem Winckel ABC. Ferner mache auch aus E dem Winckel GEH = dem Winckel ACB. Ziehe letzlich GH, ſo wird EHG der begehrte Triangel ſeyn.

Beweiß.

Der Winckel H iſt [32. 3.] = dem Winckel DEG ſo = ABC. Und der Winckel GEH iſt = gemachet, dem Winckel ACB. Da-

Dahero iſt der übrige Winckel G [32. 1.] = dem Winckel BAC.

Die 3. Propoſition.

Umb einen gegebenen Circul, einen Triangel zubeſchreiben, ſo dem gegebenen Triangel BCD gleichförmig.

Operatio.

Erlängere nach gefallen eine Seite an dem Triangel BCD, als hier BD, die machet dann 2. auswendige Winckel EBC und CDF. Formire nun aus des Circkels Centro A [23. 1.] den Winckel JAG = dem Winckel EBC, wie auch GAH = CDF. Ziehe [18. 3.] die Berührungs-Linie in G, nemlich KL, desgleichen auch alſo in J und K, ſo wird KLM der begehrte Triangel ſeyn.

Beweiß.

Weiln KJA und KGA ieder ein rechter Winckel, ſo folgt! daß die Figur KJAG [31. 3.] in einem Circul mag beſchrieben werden. Ferner weil J und G zuſammen 2 rechte Winckel. Auch [22. 3.] A und K zuſammen 2 rechte Winckel austragen. Dieſemnach der Winckel K dem Winckel CBD = ſey.

Auf ſolche Art iſt auch L gleich dem Winckel CDB, und letzlich M = dem Winckel C. So zu beweiſen war.

Die

Die 4. Propoſition.

In einem ieden fürgegebenen gerad-liniſchen Triangel ABC einen Circul zubeſchreiben.

Operatio.

Theile die Winckel A und B, ieden [9. I.] in 2. gleiche Theile, ſo werden die Theilungs-Linien einander in D. durchſchneiden.

Aus D ziehe auf eine Seite nach Belieben die perpendicular DE. So wird DE der halbe Diameter des begehrten Circuls ſeyn.

Beweiß.

Ziehe DF perpend. auf AB, und DG perpend. auf BC. Durch der Winckel-Theilung, iſt der Winckel FAD = EAD, und wegen der DF und DE geſtelten perpend. Linien, ſeynd AFD und AED rechte Winckel. Dahero wegen der commun Seite AD, iſt [26. I.] der Triangel AFD dem AED gantz gleich. Folglich DE = DF

Auf ſolche Art wird auch erwieſen, daß DG = DF. Dahero D das Centrum und [9. 3.] EFG der rechte eingeſchriebene Circul.

Die 5. Propoſition.

Um einen gegebenen geradliniſchen Triangel DEF einen Circul zubeſchreiben.

Ope-

Operatio.

Zertheile nach gefallen 2 Seiten, als hier DE und DF iede [10. 1.] in 2 gleiche Theile. Dieſe Theilungs-Linien zerſchneiden einander in B. dis giebt das Centrum des begehrten Circuls.

Beweiß.

Ziehe DB, EB, und FB. Weil wegen gleicher Theilung DC = CF. Ferner DCB und FCB ieder ein rechter Winckel, ſo folget, wegen der commun Seite BC, daß [4. 1.] DB = BF. Auf ſolche Art wird auch bewieſen, daß EB = DB Dahero [9. 3.] iſt B das Centrum des begehrten Circkels.

Die 6. Propoſition.

In einen fürgegebenen Circul ein Quadrat einzuſchreiben.

Operatio.

Ziehe den Diametrum AC, dieſen zertheile [10. 1.] in 2 gleiche Theile, durch BD. So giebt ABCD das begehrte Quadrat.

Beweiß.

Weil die 4. Winckel umb E rechte Winckel ſeynd, auch EA, EB, EC und ED einander gleich, ſo müſſen auch [4. 1.] des Qvadrats 4. Seiten einander gleich ſeyn. Es iſt auch [31. 3.] A, B, C, und D. ieder ein rechter Winckel.

Die

Die 7. Propoſition.

Umb einen fürgegebenen Circul ein Quadrat zubeſchreiben.

Operatio.

Man ziehe den Diameter CD, und theile ſolchem [10. 1.] durch E F in 2. gleiche Theile. Ferner aus C und D 2 Linien parallel mit EF. Wie auch 2. Linien aus E und F parallel mit CD gezogen. So wird ABHG das begehrte Quadrat ſeyn.

Beweiß.

Vermöge der Operatio ſeynd die 4. Winckel umb J rechte Winckel, wie auch A, B, H, G, [34. 1.] ieder ein rechter Winckel. Ferner AB und GH = CD. Dann AG und BH = EF. Da nun CD = EF, als folget, daß alle 4. Seiten des Qvadrats einander gleich, auch aus 4 rechten Winckeln beſtehe. So zubeweiſen war.

Die 8. Propoſition.

In ein fürgegebenes Quadrat ABCD einen Circul einzuſchreiben.

Operatio.

Man ziehe beyde diagonal Linien AC und BD, der Durchſchnit E, giebt des Circkels Centrum. Ziehe EF perpendicular auf AD, ſo iſt EF der Semidiameter des begehrten Circuls.

Beweiß.

Wegen dergleichen Linien EA, EB, EC und ED, auch daß EF perpend. auf AD, [iſt 18.3.] EF der halbe Diameter des begehrten Circuls.

Die 9. Propoſition.

Umb ein fürgegebenes Quadrat BC DE, einen Circul zubeſchreiben.

Operatio.

Ziehe BD und CE, ſo wird A das Centrum des begehrten Circuls ſeyn.

Beweiß.

Wegen dergleichen Linien AB, AC, AD und AE, deren iede der halbe Diameter, iſt die Sache gantz klar und warhafft.

Die 10. Propoſition.

Einem Iſoſcelem oder Triangel von 2 gleichen Seiten alſo zu machen: Daß die 2 Winckel ſo auf der baſi ſtehen, ieder inſonderheit 2 mal ſo groß, als der übrige dritte Winckel ſey.

Operatio.

Man erwehle nach gefallen eine gerade Linie AB, und theile ſolche [11.2.] in die erſte und andere Verhältnüs, welches in C geſchiehet. Ferner beſchreibe in der Weite AB aus A einen Circul. Und trage auf deſſen Circumferenz, die Wei=

Weite AC von B bis D, letzlich DC und DA gezogen. So ſeynd hierdurch 2. Triangel nemlich DBC und ABD nach begehrter Eigenſchafft formiret worden.

Beweiß.

Man beſchreibe [5.4.] umb den Triangel ACD einen Circul. Weiln nun das Quadrat von BD [11.2.] = dem rectang. von AB mit BC, ſo wird BD den Circul ACD [37.3.] in D berühren. Weiln auch die Linie CD dem Circul bey D durchſchneidet, ſo iſt der Winckel BDC [32. 3.] = dem Winckel DAC, wird nun zu beyden der commun Winckel ADC addiret, ſo wird der Winckel ADB = ſeyn, beyden Winckeln ADC und CAD zuſammen. Und dieſe itzt genennte Winckel ſeynd zuſammen auch ſo groß [32. 1.] als der Winckel BCD. Es iſt auch (weil AD = AB) der Winckel ABD = ADB, und ebenfals = BCD. Weßwegen DC [6.1.] = DB = AC, und der Winckel CDA [5.1.] = CAD.

Weil nun albereit bewieſen, daß der Winckel BDC [32. 3.] = dem Winckel A = CDA. Als iſt der Winckel BDA = dem Winckel ABD und ieder 2 mal ſo groß, als der Winckel BAD. Auf dergleichen Art iſt auch der Winckel DBC = BCD, und ieder 2. mal ſo groß, als der Winckel BDC. Welches zu beweiſen war.

Die 11. Propoſition.

In einen fürgegebenen Circul ein regular oder gleichſeitig- und gleich-wincklicht Fünff-Eck einzuſchreiben.

Operatio.

Formire nach Anleitung vorhergehenden 10. Propoſition, einen dergleichen gleichfüßigen Triangel, der ſey FGH. Bringe ſolchen [2. 4.] in dem Circul, welcher iſt ACE. Ferner trage die Linie AE [1. 4.] von A bis B, auch von E bis D, ziehe BC und DC, ſo iſt ABCDE das begehrte Fünff-Eck.

Beweiß.

Ziehe AB und EB. Die Winckel EAD, DAC CEB, BEA und ACE ſeynd [21. 3.] einander gleich, und gleich gemachet worden. Dahero ſeynd auch deren faſſende Bogen [26 3.] und Seiten, ebener maſſen auch ihre Winckel einander gleich. Und folglich das 5. Eck regular, oder gleich wincklicht und gleichſeitig. So zu beweiſen war

Die 12. Propoſition.

Umb einen fürgebenen Circul, ein regular 5. Eck zubeſchreiben.

Operatio.

Beſchreibe erſtlich innerhalb dieſes Circuls das

das regulare Fünff-Eck BCDEF, zertheile iede Seite [10.1] in 2. gleiche Theile. Hernach ziehe durch die Anrührungs-Puncta GHIKL Linien, mit des Fünff-Ecks Seiten parallel. So wird MNOPQ das begehrte regulare Fünff-Eck ſeyn.

Beweiß.

Angeſehen die Puncta GHIK und L den Circkel berühren, und die äuſern Linien mit denen innern Linien parallel lauffen, ſo iſt klar genug, daß ſolches 5. Eck gantz regular, und umb den Circkel beſchrieben ſey.

Die 13. Propoſition.

In ein regular 5. Eck ABCDE einen Circul einzuſchreiben.

Operatio.

Zertheile 2. Seiten, als hier AE und ED [10. 1.] iede in 2 gleiche Theile. Die Theilungs Linien werden einander in H durchſchneiden, und des Circkel Centrum H dargeben, welcher dann in der Weite HF herum gezogen wird.

Beweiß.

Dieweil HF und HG auf denen Seiten AE und ED perpendicular ſtehen. Als werden F und G Anrührungs-Puncta und folglich [18.3] & [5. def. 4.] der Circkel in das 5. Eck recht eingeſchrieben ſeyn.

Die 14. Propoſition.

Umb ein regular 5 Eck CDEFG einen Circul zubeſchreiben.

Operatio.

Zertheile zwey Winckel, als hier C und D [9.1.] ieden in 2 gleiche Theile, die Theilungs-Linien DA und CA werden ſich bey A einander durchſchneiden und iede der halbe Diameter des begehrten Circkels ſeyn, welcher dann aus A in der Weite AC oder AD herum zuziehen.

Beweiß.

Dis iſt zwar an ſich ſelbſt klar genug, indem AC, AD, AE, AF und AG gleicher Länge, und iede des Circuls Circumferenz berühret, wodurch dann der Circul [6.def. 4] richtig wird umſchrieben ſeyn.

Die 15. Propoſition.

In einen fürgegebenen Circul, ein regular oder gleichſeitig und gleichwincklicht Sechs-Eck, einzuſchreiben.

Operatio.

Ziehe den Diameter AB, in der Weite des halben Diametri AC, beſchreibe aus A und B die Circul Bögen DE und FG, ziehe dann AD, AE, BF, BG DF und EG. So iſt AEGBFD, das begehrte 6 Eck

Be-

Beweiß.

Weil BF und BG = CB gemachet worden. So folgt! daß an dem Triangel CFB alle 3 Seiten einander gantz gleich, und dahero ſolcher Triangel ein gleichſeitiger Triangel ſey. Auf ſolche Art iſt ferner zubeweiſen, daß alle 6. Triangel ausn Centro C von dergleichen Eigenſchafft, und dahero die gantz Figur ein regular oder gleichſeitig und gleichwincklicht eingeſchriebenes 6. Eck ſey.

Die 16. Propoſition.

In einen fürgegebenen Circul, ein regular oder gleichwincklicht und gleichſeitig funffzehn Eck einzuſchreiben.

Operatio.

Man beſchreibe erſtlich in ſolchen Circkel [11.4.] das regulare 5 Eck ABCDE, ſo dann aus dem Punct A [2.4.] dem gleichſeitigen Triangel AFG, ſo wird CF oder DG iedes eine Seite des begehrten 15 Ecks ſeyn.

Beweiß.

Der Bogen AED hält $\frac{2}{5}$ oder 6 funffzehentheil, der Bogen AEG aber $\frac{1}{3}$ oder 5 funffzehentheil, folgt: Daß wenn AEG von AED ſubtrahirt wird, GD 1 funffzehentheil der Circumferenz übrig bleibe.

Des Vierdten Buchs Ende.

Das Fünffte Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

I.

Ein Theil wird genennet dasjenige, welches in einer andern dergleichen Gröſſe oder Quantität, etliche mal begriffen iſt.

Alſo iſt 3 ein Theil von 12. nemlich der 4te Theil, weiln dieſer Theil 3. in 12 gleich 4. mal begriffen.

Nota, mit Fleiß iſt auch hier geſetzet worden, in einer andern dergleichen Gröſſe, weiln zum Ex. 3. Elen in 12 Pfunden nicht allezeit 4 mal begriffen. Dahero auch beyde Quantitäten entweder gleicher Natur ſeyn, oder aber erſtlich gleich gemachet werden müſſen. Alſo könte hier ein Stab Eiſen von 3 Elen lang 3 Pfund ſchwer ſeyn. Bey welcher Bewandnüß dann auch die 3 Pfund Stab Eiſen in andern dergleichen 12 Pfund Stab Eiſen billig 4 mal begriffen weren.

Sonſt aber können auch gantz wiederwärtige Dinge einiger maaſen alſo gegen einander compariret werden. Zum Exempel 3 Schaafe ſeynd in 12. Elen Tuch nicht 4. mal begriffen.

Hin-

Hingegen aber wenn iedes Schaaf 2. Thaler, und iede Ele Tuch ebenfals 2 Thaler gilt. So ſeynd allerdings 3 Schaafe pro 6 Thaler in 12 Elen Tuch pro 24 Thaler id eſt 6 Thaler in 24 Thaler 4 mal begriffen.

2. Multiplex iſt eine Gröſſe oder Quantitæt, in welcher ein Theil etliche mahl enthalten.

Alſo iſt 12. eine mannichfaltige Größe/ weil der Theil 3. darinne 4. mahl enthalten.

3. Ratio oder Verhältniß iſt, wenn 2. oder mehr Gröſſen oder Qvantitæten, gegen einander geſtellt oder verglichen werden.

Nota, Bey Verhältniß einer Qvantitæt gegen der andern, zum Ex. 4. gegen 8. wird 4. die vorhergehende, und 8. die nachfolgende Qvantitæt oder Größe genennet.

Es iſt auch der Unterſcheid wohl zu mercken, was eine gleiche, gröſſere, oder kleinere Verhältniß ſey.

Dahero ſagt man, daß

Eine gleiche Verhältniß ſey, wie 8. gegen 4. alſo 6. gegen 3. und 10. gegen 5. &c.

Eine gröſſere Verhältniß ſey, 18. gegen 2. (eine 9. mahlige) gegen der kleinern, 8. gegen 4. (eine 2. mahlige.)

Eine kleinere Verhältniß ſey 8. gegen 4. (eine 2. mahlige) gegen der Gröſſern 18. gegen 2. (eine 9. mahlige.)

Daß aber verkehrt 4. gegen 8. eine gröſ-

ſere Verhältniß, als 2. gegen 18. (wie bey folgender 8. Prop. des 5ten Buchs zuſehen,) ſey, wäre einiger maaßen in Zweiffel zu ziehen.

Zumahln wenn man vor bekandt annehmen wolte, daß die Proportion oder Verhältniß, und Gegeneinanderhaltung zweyer gleich Natur-mäßiger, als auch anderer (gleich als bey der 1. Def. einiger maaßen angemercket worden,) hierunter zu verſtehen.

Hier in Zahlen oder imaginirten Gröſſen hat es ſtatt, wenn ſolches Theilungs-weiſe alſo angenommen wird, nehmlich:

Daß 4. gegen 8. der halbe Theil oder $\frac{1}{2}$. und 2. gegen 18. der 9te Theil oder $\frac{1}{9}$. Hier iſt nun $\frac{1}{2}$. freylich gröſſer als $\frac{1}{9}$. In welchen Verſtand auch ſolche Verhältniß bey dieſer Beſchaffenheit vor bekandt anzunehmen.

4. Proportio, iſt eine Gleichförmigkeit oder Vergleichung einiger Gröſſen.

Zum Ex. 4. gegen 6. und 8. gegen 12.

5. Dieſe Quantitæten haben eine Verhältniß gegen einander, daß wenn die eine davon multipliciret wird, ſolches die andere letzlich übertrifft.

Zum Ex. 2. gegen 8. da die 2. 5.mahl genommen 10. die 8. endlich übertrifft.

Hin-

Hingegen iſt zwiſchen einen Punct und einer Linie, oder zwiſchen einer Fläche und einen Cörper keine Verhältniß. Denn man mag eine Fläche gleich unendlich multipliciren, ſo kan doch nicht geſagt oder heraus gebracht werden, daß es lezlich einen Cörper übertreffen ſolte, &c.

6. Die Quantitæten oder Gröſſen haben eine gleiche Verhältniß, wenn die Erſte iſt gegen der Andern, gleich wie die Dritte gegen der Vierten, oder, wie die Erſte gegen der Dritten, alſo die Andere gegen der Vierten.

Zum Ex. 3. 6. 12. 24.

7. Die Gröſſen nun, welche dergleichen Verhältniß haben/ (vorhergehender 6. Def.) werden proportionirte Gröſſen genennet.

8. Wenn 4. Quantitæten oder Zahlen alſo beſchaffen/ da der Multiplicant oder Vermehrer der Andern zur Erſten die Andere übertrifft. Die Multiplicirung der Vierten zur Dritten aber, die Vierte nicht übertrifft. So ſagt man, daß die Erſte zu der Andern eine gröſſere Verhältniß, als die Dritte zu der Vierten habe.

	1	2	3	4
Dergleichen ſeyn	12.	3.	12.	4.
	(mult.4.)		(mult.3.)	

Alwo die Andere in der Erſten 4. mahl enthalten, alſo der Multiplicant 4. die andere Zahl 3. übertrifft. Die Vierte aber in

der

der Dritten 3. mahl enthalten, alſo der Multiplicant 3. die vierte Zahl 4. nicht übertrifft.

Dahero iſt die Verhältniß 12. gegen 3. gröſſer, als 12. gegen 4.

9. Eine iede Vergleichung, erfordert zum wenigſten 3. Quantitæten.

Zum Ex. 4. zu 6. iſt wohl eine Verhältniß, wie 1. gegen $1\frac{1}{2}$. aber noch keine Vergleichung gegen etwas andern.

Hingegen bey 3. Zahlen 4. 6. 9. iſt albereit eine Vergleichung verhanden, nehmlich: wie 4. gegen 6. alſo vergleichet ſich 6. gegen 9.

item, bey 4. Zahlen oder Quantitæten 8. 12. 4. 6. iſt 8. gegen 12. wie 4. gegen 6. &c.

10. Wenn etliche Quantitæten in continuirlicher Verhältniß ſtehen, alſo: Daß die Erſte gegen der Andern, wie die Andere gegen der Dritten/ und die Dritte gegen der Vierten, ſich verhält, &c. ſo iſt die Verhältniß der Erſten gegen der Dritten doppelt, (das iſt duplicata ratio, oder quadrirte Verhältniß,) die Verhältniß der Erſten und Vierten aber, dreymahlich (das iſt triplicata ratio, oder Cubiſche Verhältniß.

Vergleichen ſeynd 2. 4. 8. 16. oder 3. 12. 48. 192. &c in ſumma, alle Geometriſche Progreſſional-Zahlen.

11. Ver-

11. Vergleichende oder proportionirte Verhältniß iſt/ da die 2. erſten ſich proportioniren, mit die beyde nachfolgende.

4. 6. 10. 15. wie 4. gegen 6. alſo 10. gegen 15.

12. Verwechſelte Verhältniß iſt, da eine vorgehende, zu einer andern vorgehenden, und die eine nachfolgende zu der andern nachfolgenden, verglichen wird.

Nemlich wie 8. gegen 12. alſo 6. gegen 9.

verwechſelt

wie 8. gegen 6. alſo 12. gegen 9.

13. Verkehrte Verhältniß iſt, da ie eine nachfolgende / der vorhergehenden verglichen wird.

Nemlich wie 4. gegen 6. alſo 8. gegen 12.

verkehrt

wie 6. gegen 4. alſo 12. gegen 8.

oder

wie 8. gegen 4. alſo 12. gegen 6.

14. Zuſammen geſetzte Verhältniß iſt/ da ie eine vorhergehende und nachfolgende zuſammen genommen/ dem nachfolgenden verglichen wird.

Nem-

Nemlich wie 6. gegen 12. alſo 4. gegen 8.

Zuſammen geſetzt

wie 6 + 12 wie 4 + 8.

18 gegen 12 wie 12 gegen 8.

15. Zertheilte Verhältniß iſt, da man die Differenz oder Unterſcheid, gegen eine nachfolgende vergleichet.

Nemlich wie 4. gegen 6. alſo 8. gegen 12.

Zertheilet

4. gegen 6 8. gegen 12.

Diff. 2. gegen 6. wie Diff. 4. gegen 12.

16. Verwendete Verhältniß iſt, wenn das vorhergehende, gegen dem Unterſcheid oder Differenz des vorhergehenden und nachfolgenden, verglichen wird.

Nemlich wie 4. gegen 6. alſo 8. gegen 12.

Verwendet

wie 4. gegen die Diff. 2. alſo 8. geg. die Diff. 4.

17. Gleichheit der Proportion iſt, da mehr als 2. Quantitæten gegen einander geſetzet/ und ie 2. und 2. zuſammen verglichen werden, biß man endlich von der einen Quantitæt die Erſte und Letzte/ mit der Erſten und Letzten von der andern Quantitæt, proportionirt findet. Nehmlich:

wie	8	zu	6
alſo	12	zu	9
auch	16	zu	12
alſo	4	zu	3

Dahero 8. zu 4. wie 6. zu 3.

18. Eine ordentliche Verhältniß iſt, da in einer Ordnung, die Erſte zu der Andern, wie die Andere zu der Dritten, und die Dritte zu der Vierten, &c. ſich, gleich wie in der andern Ordnung, verhält.

Nemlich Erſte Ordnung. 24. 12. 16. 4.
Andere Ordnung. 12. 6. 8. 2.

19. Eine unordentliche Verhältniß iſt, da die Ordnung nicht in ſteter Verhältniß, ſondern verwechſelt, ſtehet.

Nemlich:	A	8	D	8
	B	4	E	12
	C	6	F	6.

Das iſt, wie A zu B, alſo E zu F, und wie B zu C, alſo D zu E. Woraus folget! daß gleichwohl A zu C, wie D zu F.

Die

Die 1. Propoſition.

Wenn etliche Quantitæten ABC, etlichen andern Quantitæten DEF, gleich verhaltend. So wird auch die eine Summa (19.) der andern Summa (38.) Quantitæten, eben alſo proportionirt ſeyn: Wie etwa ein Theil (A 4.) der einen Quantitæt, ſich zu dem gleichförmigen Theil (D 8.) der andern Quantitæt verhält.

Erſte Ordn.		Andere Ordnung.	
wie	A 4	zu	D 8
	B 6	zu	E 12
	C 9	zu	F 18
alſo	19	zu	38.

Beweiß.

Weil iede Quantitæt der erſten Ordnung A B und C, gegen ieder Quantitæt der andern Ordnung D, E und F, beſonders gleiche Verhältniß hat. So folget! daß auch [2. ax. 1.] die Summa des einen, gegen der Summa des andern, gleiche Verhältniß haben müſſe.

Die 2. Propoſition.

Wenn bey 6. Quantitæten die erſte A gegen der andern B, wie die dritte C, gegen

gen der vierten D, und die fünffte E gegen der andern B, wie die ſechſte F, gegen der vierten D. So wird die Erſte und Fünffte zuſammen, ſich gegen der Andern verhalten. Gleich wie die Dritte und Sechſte zuſammen, gegen der Vierten.

2	6	4	12
A	B	C	D
10		20	
E		F	

wie 12	zu 6.	alſo 24	zu 12.
A,E	B	C,F	D.

Beweiß.

Weil E gegen B, wie F gegen D. Und A ebenfalls gegen B, wie C gegen D, folgt! daß auch [2. ax. 1.] A + E gegen B, als C + F gegen D ſey, oder ſich alſo verhalten müſſe.

Die 3. Propoſition.

Wenn ſich die erſte Quantitæt A gegen der andern B verhält, gleich wie die dritte C gegen der vierten D. Und man noch a parte nimmt die fünffte und ſechſte Quantitæt, da ſich die fünffte E gegen der erſten A verhält, gleich wie die ſechſte F gegen der dritten C. So wird

ſich auch die fünffte E, gegen der andern B verhalten, gleich wie die ſechſte F, gegen der vierten D.

4.	8.	3.	6.	12.	9.
A	B	C	D	E	F.

Beweiß.

Weil A gegen B, als C gegen D. ſo nimm beyderſeits weg A und C. So wird ſeyn [3. ax. 1.] E gegen B = F gegen D. Das iſt, die 5te gegen der 2ten, als die 6te gegen der 4ten. So zu beweiſen war.

Die 4. Propoſition.

Wenn 4. proportionirte Gröſſen ABCD, ſeynd, und man nimmet noch zwey andere Groſſen E und F, in proportion der 1ten und 3ten. item, noch 2. andere G und H in proportion der 2ten und 4ten. So werden ſolche 4. letztere Quantitæten auch proportionirt ſeyn.

2	4	3	6	6	9	12	18
A	B	C	D	E	F	G	H.

Beweiß.

Weil E gegen A, wie F gegen C, und alſo A, C und E, F in gleicher Verhältniß ſtehen. Wiederum werden auf ſolche Art auch B, D und G, H, in gleicher Verhältniß ſtehen. Dahero

hero ſeynd [6. Def. 5.] auch alle 8. Gröſſen proportionirt.

Anhang.

Nota, die 4. letztern Gröſſen werden vermöge der Propoſition wohl proportionirt, ſie bekommen aber nicht eben die Verhältniß, gleich denen 4. erſten Gröſſen, wie einige Auctores bey dieſer Propoſition gemeldet.

Die 5. Propoſition.

Wenn von zweyen Quantitæten A und B, von ieder ein Theil oder Stück nach derer Quantitæten Proportion weggenommen wird. So werden auch die reſtirende Stücke, die Proportion behalten.

	A 9	B 18
Von ieden $\frac{1}{3}$. weg	3	6
Reſt	6 gegen	12, wie 9 gegen 18.

Beweiß.

Diß iſt [3. ax. 1.] an ſich ſelbſt offenbar.

Die 6. Propoſition.

Wenn 2. Gröſſen A und B, gegen 2. andern C und D, gleich proportionirt ſeyn. Und man von A und B, gleich proportionirte Theile weg nimmt. So

werden dann die Reſte, mit C und D wiederum gleiche Proportion haben.

	A 6	B 12	C 2	D 4.
weg $\frac{1}{3}$.	2	4		
die Reſte	4 gegen	8	wie 2 gegen	4.

Beweiß.

Diß iſt nach vorherg. 5. Propoſ. wieder klar. Denn was dort von zweyen, iſt hier von vier Quantitæten, und alſo noch von mehrerern gleich proportionirten, unendlich hinaus, zu verſtehen.

Die 7. Propoſition.

Gleich groſſe Quantitæten A, B, C, gegen einer andern Quantitæt D, haben einerley Proportion. Und alſo auch eine Quantitæt E, gegen andere gleich groſſe Quantitæten F, G, H, behält auch einerley Proportion.

8.	8.	8.	4.
A	B	C gegen	D.

Oder

3	12.	12.	12.
E gegen	F	G	H.

Beweiß.

Diß iſt wieder an ſich ſelbſt klar. Denn A verhält ſich gegen D, wie B gegen D, und C gegen D &c.

Die 8. Propoſition.

Wenn man zwey ungleiche Gröſſen A und B, gegen einer dritten C ſtellet. So wird die Verhältniß der Gröſſern A gegen C gröſſer ſeyn, als B gegen C. Hingegen aber wird C zu B eine gröſſere Verhältniß, als C zu A haben.

A 15. B 6. C 3.

Beweiß.

1. Satz. Weil A gröſſer als B, ſo muß nothwendig auch C öffter in A (ſo hier 5. mahl) als C in B (als hier nur $2\frac{1}{2}$. mahl) begriffen ſeyn. Dahero hat A zu C eine gröſſere (nehmlich 5. mahlige Verhältniß, als B zu C (daß iſt $2\frac{1}{2}$. mahlige.)

Hingegen

2. Satz. B in C iſt $\frac{1}{2}$. mahl, und A in C $\frac{1}{5}$. mahl enthalten. Dahero ſagt man, daß C gegen B gröſſere Verhältniß habe, als C gegen A.

Anhang.

Der 1. Satz hat ſeine Richtigkeit, der 2. Satz aber, wäre in vielerhand wege zu dubitiren. Wie allbereit bey vorhergehender 3. Defin. angemercket worden.

Die 9. Propoſition.

Wenn einige Gröſſen A, B &c. zu einer andern Gröſſe C einerley Verhältniß

niß haben. So werden ſolche Gröſſen A und B einander gleich ſeyn. Und hinwiederum, ſo eine Gröſſe D gegen andere E, F &c. gleiche Verhältniß hat. So werden auch ſolche Gröſſen E und F gleich groß ſeyn.

6	6	3	4	12	12.
A und	B gegen	C	D gegen	E und	F.

Beweiß.

Iſt gleich vorhergehender 7. Propoſ. und eine gantz offenbare Sache.

Die 10. Propoſition.

Wenn zwey Gröſſen A und B, gegen einer andern Gröſſe C gehalten werden. So wird unter ſolchen die Gröſte ſeyn, welche eine gröſſere Verhältniß (gegen C) macht. Die aber iſt die kleineſte (B) gegen welche die andere Quantitæt (C) eine gröſſere Proportion hat.

A 15. B 6. C 3.

Beweiß.

Iſt eben vorhergehende 8. Propoſition.

Die 11. Propoſition.

Verhältniſſe A, B, und C, D, item E, F, &c. ſo einerley Verhältniß mit einer

ner andern Verhältniß G, H. Die haben auch unter ſich einerley oder gleiche Verhältniß.

2 3	4 6	8 12	6 9.
A zu B	C zu D	E zu F	wie G zu H.

Beweiß.

Iſt [1. ax. 1.] eine offenbare Warheit.

Die 12. Propoſition.

Wenn etliche Gröſſen A, B, und C, D, dann E, F, &c. ie eine gegen der andern gleiche Verhältniß haben. Wie nun iede vorhergehende (A, C, E,) gegen ihrer folgenden (B, D, F,) Gröſſe ſich verhält. Alſo wird ſich auch die Summa aller vorhergehenden, gegen der Summa aller folgenden Gröſſen, verhalten.

Vorhergehende		Nachfolgende.
wie A 4	-	gegen B 6
alſo C 8	-	gegen D 12
und E 6	-	gegen F 9
alſo die Summa 18		gegen der Summa 27.

Beweiß.

Iſt eben vorhergehende 1. Propoſition.

Die 13. Propoſition.

Wenn 4. proportionirte Gröſſen A, B, C, D, ſeynd, da ſich A gegen B, wie C gegen D verhält: Und man nimmt andere 2. Gröſſen E und F, ſo eine kleinere Proportion, als die dritte C zu der vierten D. So wird auch A zu B eine gröſſere Verhältniß, als E zu F haben.

A 6 B 9 C 8 D 12 E 10 F 8.

Beweiß.

In Anſehung, da die Verhältniß A zu B, gleich der Verhältniß C zu D. So folgt! daß [9. 5.] E und F zu A und B, auch eben dieſelbe Verhältniß, als wie zu C und D, habe.

Die 14. Propoſition.

Wenn 4. Gröſſen A, B, C, D, proportionirt ſeyn, und die erſte Gröſſe iſt gröſſer als die dritte. So wird auch die andere gröſſer ſeyn als die vierte. Iſt ſie kleiner, auch kleiner. Iſt ſie gleich, auch gleich.

1. Satz. 8 12 4 6 — A B C D

2. Satz. 4 8 6 12. — A B C D.

3. Satz. 6 8 6 8 — A B C D.

Be=

Beweiß.

1. Satz. Weil B in A ſo vielmahl/ als D in C begriffen, und A gröſſer als C. Folgt! daß auch [9. 5.] B gröſſer als D ſeyn müße.

2. Satz. Da aber A kleiner als C, iſt [9. 5.] B auch kleiner als D.

3. Satz. item, da A gleich C, alſo iſt auch [7. 5.] B gleich D. So zu beweiſen war.

Die 15. Propoſition.

Wie gantze Quantitæten A und B gegen einander proportionirt ſeyn. Alſo ſeynd auch ihre proportionirte Theile oder Stücke C und D gegen einander proportionirt.

Wie die Gantzen A 8 gegen B 12.
alſo der vierte Theil C 2 gegen D 3.

Beweiß.

Diß iſt [6. 5.] zur Gnüge erwieſen.

Die 16. Propoſition.

So bey 4. proportionirten Gröſſen A B C D, ſich die erſte A hält, gegen der andern B, wie die dritte C, gegen der vierten D. So wird ſich auch die erſte A zu der dritten C verhalten, gleich wie die andere B zu der vierten D.

A 2. B 4. C 6. D 12.

Beweiß.

Weil A zu B, wie C zu D. Folget! [14. 5.] daß auch A zu C, wie B zu D.

Oder:

Wie die vorhergehende A zur vorhergehenden C. alſo [12. Def. 5.] die nachfolgende B zur nachfolgenden D.

Nota, dieſe 16. Propoſ. iſt der Beweiß der Regula Detri.

Die 17. Propoſition.

Wie zuſammen geſetzte proportionirte Gröſſen A, B, und C, D, ſich gegen einander verhalten. Als werden ſelbige auch zertheilt, alſo wieder proportionirt ſeyn.

A 4 zu B 6 — C 8 zu D 12.

wie 10 gegen 20. alſo auch 4. zu 8. und 6. zu 12.

Beweiß.

Iſt vice verſa vorherg. 12. Propoſition.

Die 18. Propoſition.

Wenn einige Quantitæten A und B proportioniret zertheilt, proportionirt ſeyn. Werden ſodann zuſammen geſetzt C und D, auch alſo proportionirt ſeyn.

3. 6.	4. 8.	alſo C 9 iſt zu A 3. wie
A.	B.	D 12 zu B 4. oder
9.	12.	C 9. zu A 6. wie D 12. zu B 8.
C.	D.	

Beweiß.

Iſt vice verſa vorherg. 17. Propoſ. Denn da A und B iedes gleich proportionirte Theile, ſo werden auch [1. 5.] ihre Summen mit ſolchen Theilen gleiche Proportion haben.

Die 19. Propoſition.

Wenn von zweyen Gröſſen A und B, ieder ein Theil C und D weggenommen wird, und C gegen D, wie A gegen B proportionirt. So werden auch die übrigen Reſte E und F, dergleichen Proportion haben.

A 8	B 12
C 2	D 3
Reſt E 6.	Reſt F 9.

Beweiß.

Iſt eben vorhergehende 5. Propoſition.

Die 20. Propoſition.

Wenn 3. Gröſſen A, B, C, und noch 3. andere Gröſſen D, E, F, gleich verhaltend proportionirt ſeyn. Und die

erſte

erſte A gröſſer, kleiner, oder gleich, der dritten C. So wird auch die vierte D gröſſer, kleiner, oder gleich, der ſechſten F ſeyn.

1. Satz.	A 8.	B 6.	C 4.	D 12.	E 9.	F. 6.
2. Satz.	A 3.	B 5.	C 10.	D 6.	E 10.	F 20.
3. Satz.	A 4.	B 6.	C 4.	D 6.	E 9.	F 6.

Beweiß.

Iſt vorhergehender 14. Propoſition conform, denn was dort von 4. proportionirten Gröſſen zu verſtehen, kan hier auch bey 6. proportionirten Gröſſen ſtat finden.

Die 21. Propoſition.

Wenn 3. Gröſſen A,B,C ſeynd, und noch 3 andere D,E,F, in verruckter Ordnung alſo: Daß A zu B, wie E zu F, und B gegen C, wie D gegen E. Iſt nun die Erſte A, gröſſer, kleiner, oder gleich, der Dritten C. So wird auch die Vierte D gröſſer, kleiner, oder gleich, der Sechſten F ſeyn.

	Vorhergehende			Nachfolgende		
1 Satz.	A 10.	B 5.	C 2.	D 15.	E 6.	F 3.
2 Satz.	A 2.	B 8.	C 4.	D 6.	E 3.	F 12.
3 Satz.	A 6.	B 4.	C 6.	D 2.	E 3.	F 2.

Be-

Beweiß.

Weil bey der einen Ordnung, die Erſte A 10. gegen der Andern B 5. Wie in der andern Ordnung, die Andere E 6 gegen der Dritten F. 3. Und dann die Andere B 5. gegen der Dritten C 2. wie die Erſte D 15. gegen der Andern E 6. So folgt! daß [12. def. 5.] beyde Ordnungen in verwechſelter Proportion ſtehen. Und [20. 5.] die verlangte Verhältnüs ihre Richtigkeit haben müſſe.

Die 22. Propoſition.

Wenn 3 Gröſſen A, B, und C ſeynd, dann ferner noch 3 andere D, E, und F, Und ſich A gegen B, wie D gegen E. ic. B gegen C, wie E gegen F verhält.

So wird ſich auch A gegen C, wie D gegen F, verhalten.

A 4. B 10. C 2. D 8. E 20. F 4.

Beweiß.

Weiln beyde Ordnungen in gleicher Verhältnüs ſtehen, als nehme man [5. 5.] die 2 proportionirte Theile B und E hinweg. So wird A gegen C wie D gegen F ſich verhaltende, übrig bleiben.

Die 23. Propoſition.

Wenn 3 Gröſſen A, B und C ſeynd,

dann

dann ferner noch 3 andere Gröſſen D, E, F in verruckter Ordnung alſo: daß ſich A gegen B, wie E gegen F. Und B gegen C, wie D gegen E verhält. So wird A gegen C, wie D gegen F ſeyn.

A 10. B 5. C 2. D 15. E 6. F 3.

Beweiß.

Dis iſt vorhergehender 21. Propoſition gleichförmig und alſo daſelbſt ſchon bewieſen.

Die 24. Propoſition.

Wenn bey etlichen Gröſſen, ſich die Erſte A gegen der Andern B, wie die Dritte C, gegen der Vierten D. Und die Fünffte E gegen der Andern B, wie die Sechſte F gegen der Vierten D verhält. So wird auch die Erſte und Fünffte zuſammen, ſich gegen der andern B. Gleich wie die Dritte und Sechſte zuſammen, gegen der Vierten D verhalten.

6	4	12	8	2	4
A	B	C	D	E	F

Beweiß.

Dieſe 24. Propoſition iſt vorhergehender 2. Prop. gantz gleich und ähnlich, alſo daſelbſt albereit bewieſen

Die

Die 25. Propoſition.

Wenn 4. proportionirte Gröſſen A, B, C, D, genommen werden. So wird allezeit die Gröſte und Kleinſte zuſammen genommen, gröſſer ſeyn, als die beyden übrigen.

A 15 B 10 C 12 D 8
Hiervon C 12 und D 8

Reſt E 3 F 2.

Beweiß.

Man ziehe C von A, und D von B. So wird [19. 5.] E gegen F, wie A gegen B ſeyn. Da auch A gröſſer als B ſo wird auch [14. 5.] E gröſſer als F ſeyn.

Nun iſt D + F + C = B + C (weil D + F = B)
item C + E + D = A + D (weil C + E = A)

Dis letztere A + D aber, iſt gröſſer als B + C.

Weil dann vorher erwieſen, daß E gröſſer als F.

Dahero folgt! das alſo die Gröſte und Kleinſte A + D, zuſammen (23) gröſſer, als die beyden übrigen C + D zuſammen (22) ſeyn müſſen.

Des Fünfften Buchs Ende.

Das

Das Sechſte Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1.

Gleichförmig oder gleich-proportionirte Figuren ſeynd, deren Winckel einander gleich, und die Seiten, welche ſolche Winckel begreiffen, proportionirt ſeyn.

Alſo iſt der Winckel BAC = DCE, und der Winckel ABC = CDE. Wie auch der Winckel ACB = CED. Ferner ſeynd die 3 Seiten des einen Triangels ABC, 15. 18. 21. mit des Triangels CDE. von gleichen Winckeln beſchlieſenden 3 Seiten 10. 12. 14. in gleicher Verhåltnůß.

2. Wiederſins oder reciproce proportionirte Figuren ſeynd, da die gleichen Winckel, die Seiten reciproce proportionirt begreifen.

Alſo ſeynd hier an dem commun Winckel ABC die beyden Parallelogramma AD und DC angebracht, ſo gleiches Inhalts und deren Seiten 4 und 12 dann 6 und 8. alſo reciproce proportionirt, nemlich:

wie

wie 4 gegen 8 alſo 6 gegen 12.
oder wie 6 gegen 4 alſo 12. gegen 8

3. Man ſagt! daß eine rechte Linie (AB) proportionirt (in C) zertheilt ſey. Wenn die gantze Linie (AB) ſich gegen dem gröſſern Theil (AC) verhält, wie das gröſſere Theil (AC) gegen dem kleinern Theil (CB)

Nota, Iſt albereit durch die 11. Prop. des 2. Buchs abgehandelt worden.

4. Die Höhe einer ieden Figur (ACD) wird angedeutet, durch die perpendicular Linie (CE) welche aus dem obern Punct (C) auf die baſin (AD) herunter fält.

5. Wenn 2 oder mehr proportiones in einander multipliciret werden, ſo erwächſet daraus die Benennung der vermehrten Proportion.

A 6 ‿2‿ B 12 ‿3‿ C 36. ‿5‿ D 180.

Zum Ex. bey denen 4. Quantitäten A, B, C, D, verhält ſich A gegen B, wie 1 zu 2. B gegen C, wie 1 zu 3 und C gegen D, wie 1 zu 5. Dieſemnach 2. 3 und 5 in einander multipliciret giebt 30. Dahero ſagt man, daß ſich A zu D verhalte, wie 1 gegen 30. id eſt 6 zu 180.

Die 1. Propoſition.

Alle Triangel und Parallelogramma, ſo gleicher Höhe, verhalten ſich gegen einander in Proportion ihrer baſes.

Erklärung.

1. Der Triangel ABC, iſt gegen dem Triangel DEF, gleich wie baſis AC gegen der baſi DF.

2. Item, das Parallelogram ABGC iſt gegen dem Parallelogram DEHF, wie baſis AC gegen der baſi DF.

Beweiß.

1. Satz. Man laſſe gelten, daß AC in 3. gleichen Theilen AJ, JK und KC beſtehe, auch DF juſt 4 dergleichen ſolcher Theile DC, LM, MN und NF halte. Dieſemnach werden alle getheilte Triangel ABJ, JBK, KBC. item, DEL. LEM & [38. 1.] einander gleich (verſtehe an quardirten Inhalt) groß ſeyn. Und dahero der Triangel ABC gegen dem Triangel DEF, in proportion, wie AC gegen DF, das iſt, wie 3. gegen 4 ſich verhalten.

2. Satz. Weiln nun alle Parallelogramma [41. 1.] ſo mit die Triangel auf gleichen baſibus ſtehen, gegen die Triangel doppelten Inhalts. ſo folget! daß auch die Perallelogramma unter einerley Höhe, gleich als ihre baſes proportionirt. So zubeweiſen war.

Die 2. Propoſition.

So man in einen Triangel ABC (wo es auch geſchehe) eine Linie DE, mit der gegenſtehenden Seite AC, parallel ziehet, ſo wird ſolche die andern 2. Seiten AB und BC proportionirt, zertheilen.

Und wenn in einen Triangel, eine Linie DE gezogen worden, welche die 2. Seiten AB und BC proportionirt zertheilt, ſo wird ſelbige mit der gegenliegenden Seite AC parallel ſeyn.

Beweiß.

Ziehe DC und AE.

1. Satz. Beyde Triangel DAE, und DCE, ſtehen auf einer baſi DE, und liegen zwiſchen 2 parallel Linien, ſeynd alſo [37. 1.] von gleicher Gröſſe. Und der Triangel BED iſt gegen den Triangel DAE proportionirt, [1. 6.] wie BD gegen DA, item, der Triangel BED gegen DCE, wie BE gegen EC. Folgt! [17. 5.] daß BD gegen DA, wie BE gegen EC.

2. Satz. Alſo in Gegentheil, wenn die Seiten BA und BC proportionirt zertheilt worden, daß BD gegen DA, wie BE gegen EC, ſo wird DE mit AC parallel ſeyn.

Die 3. Propoſition.

Wenn eines Triangels Winckel BCD in 2 gleiche Theil, und dadurch zugleich die Seite BD in A zertheilt wird, ſo werden die beyde Theile gegen denen 2. Seiten, daß iſt AB gegen BC, wie AD gegen DC proportionirt ſeyn. Und ingegentheil wenn CA die Linie BD alſo proportionirt zertheilt, ſo wird der Winckel BCD hierdurch in 2. gleiche Theil getheilt worden ſeyn.

Beweiß.

1. Satz. Ziehe AE, perpendicular auf BC, und AF perpendicular auf CD.

In Anſehung des in 2. gleiche Theil getheilten Winckels BCD, wird der Winckel ECA, dem Winckel ACF gleich ſeyn, und da AEC und AFC ieder ein rechter Winckel, anbey die Seite AC commun, ſo werden [26. 1.] beyde Triangel AEC und ACF in allen gantz gleich, beſonders aber AE = AF ſeyn. Weil dahero beyde Triangel CAB und CAD [4. def. 6.] durch AE und AF gleicher Höhe, wird [1. 6.] ſich BC gegen DC, folglich auch BA gegen AD, wie der Triangel BAC gegen dem Triangel ACD verhalten.

2. Satz. Wenn dahero in Gegentheil BD durch

durch CA alſo proportionirt zertheilt worden, daß CB gegen BA, wie CD gegen AD, ſo wird der Winckel BCD, hierdurch in 2. gleiche Theil zertheilt ſeyn.

Die 4. Propoſition.

Alle Triangel ABC und CDE ſo gleich proportionirte Winckel haben (nemlich B = D, A = C, item, C = E) die haben auch gleich proportionirte Seiten, ſo wohl die von gleichen Winckeln begriffen (AB gegen BC, wie CD gegen DE) als die ſo gleichen Winckeln unterzogen (AC gegen CE.)

Beweiß.

Man laſſe gelten, daß beyde baſes AC und CE eine gerade Linie AE machen, erlängere dann AB und ED, welche zuſammen kommen in F.

In Anſehung derer gleichen Winckel iſt dann [28.1.] BC mit FD oder FE, und DC mit BF oder AF parallel. Auch BF = CD, und BC = FD, Dahero verhält ſich [26.] AB zu BF (ſo = CD) wie AC zu CE, item BC (ſo gleich FD) zu DE, wie AC zu CE. So zubeweiſen war

Die 5. Propoſition.

Wenn zwey Triangel, von gleich proportionirten Seiten beſchloſſen ſeyn, ſo wer-

werden auch deren Winckel, die von denen proportionirten Seiten begriffen oder unterzogen, einander gleich ſeyn.

Beweiß.

Man beſehe vorhergehender Prop. Figur und Beweiß, ſo wird ſich finden daß ſolches eben dis hier vice verſa ſey.

Die 6. Propoſition.

Wenn in zweyen Triangeln, ein Winckel B, gleich dem Winckel des andern E, und die Seiten, welche ſolche Winckel begreiffen, ſeynd proportionirt, (nemlich: wie AB gegen BC, alſo DE gegen EF) ſo werden ſolche Triangel gleich wincklicht ſeyn.

Beweiß.

Man trage [2. 1.] die Seite ED von B bis G, ingleichen die Seite EF, von B bis H, und ziehe GH.

Dieſem nach wird GH [4. 1.] = der DF ſeyn, ferner der Triangel BGH in allen gantz gleich dem Triangel EDF. item, die Seiten AB und BC [2. 6.] werden durch G und H proportionirt zertheilt, und dahero beyde Triangel [5. 6.] gleichwincklicht ſeyn. So zubeweiſen war.

Die

Die 7. Propoſition.

So in zweyen Triangeln BCD, EFG, der Winckel C = F, auch ie 2 Seiten, die einem andern Winckel begreiffen (wie CB gegen BD, alſo FE gegen EG) proportionirt haben. Jedes 2 übrigen Winckel aber, zugleich ein ieder entweder kleiner oder gröſſer, als ein rechter Winckel. So werden dieſe Triangel alsdann einander gantz gleich proportionirt, und auch gleichwincklicht ſeyn.

Beweiß.

Man bringe EF von B bis A, und EG von B bis H. und ziehe AH.

Da nun die Winckel B und E einander auch = (entweder gröſſer, oder kleiner, als Winckelrecht) geſetzet worden, ſo folgt! daß dieſe beyde Triangel [6.6.] BCD und EFG, einander gleich proportionirt und gleichwincklicht ſeyn.

Nota, daß hier geſaget worden; Wie die beyde Winckel ieder entweder gröſſer oder kleiner, als Winckelrecht ſeyn müſten.

Iſt alſo zuverſtehen. Weiln es geſchehen kan, daß an zweyen Triangeln JKN und OPQ, der Winckel KIN = POQ und die Seite KI zu PO, wie KN zu PQ, da demnach der Triangel JKN dem Triangel OPQ gantz und gar nicht

gleich (weil hier der eine Triangel rechtwincklicht, und der andere ſtumpffwincklicht iſt.

Dahero müſſen beyde Triangel zugleich, entweder 2 ſcharffwincklichte, oder aber 2 ſtumpffwincklichte ſeyn. Denn anders were die Propoſition mangelhafft.

Mit denen rechtwincklichten Triangeln hat es ohne dis ſeyn verbleiben. Denn ſo bey zweyen rechtwincklichten Triangeln, um 2 gleiche ſcharffe Winckel, und dann mit dem rechten Winckel auch nur noch bey ieden eine Seite gleich des andern Triangels bekand gegeben wird, ſo dann beyde Triangel einander gantz gleich ſeyn müſſen

Die 8. Propoſition.

So man in einem rechtwincklichten Triangel ABC, eine perpendicular Linie BD, aus dem rechten Winckel (B) auf die hypothenuſa AC herunter ziehet. So werden hierdurch 2 andere rechtwincklichte Triangel (ABD, und DBC) formiret, welche ſo wohl unter ſich ſelbſt, als mit dem gantzen Triangel (ABC) gleich proportionirt ſeyn.

Beweiß.

Weil der Winckel ABC, ADB, und BDC ieder ein rechter Winckel. So iſt der Winckel ABD [32. 1.] = dem Winckel ACB. Folgt! daß

daß auch der Winckel B A D = dem Winckel DBC, und dahero alle 3. Triangel A B C, und ADB, item BDC gleichwincklicht. Letzlich [4.6.] auch einander gleich proportionirt ſeyn.

In Zahlen.

Es ſey AB 15. und BC 20.

So komt AC 25. BD 12. AD 9. und DC 16.

Die 9. Propoſition.

Von einer gegebenen rechten Linie *AB*, ein begehrt Theil (*AC*) abzuſchneiden.

Operatio.

Man begehrt zum Ex. von AB den 4ten Theil abzuſchneiden. Als ziehe nach Belieben, aus A die Linie AD. darauf zeichne aus A anfahende 4 gleiche Theile nach belieben, bis E, deren eines iſt AF. Ziehe dann BE, und ferner aus F die FC parallel mit BE, ſo wird AC der begehrte 4te Theil ſeyn.

Beweiß.

Weil F C mit EB parallel, ſo werden [2.6.] in dem Triangel AEB, die 4 Theile A E ſich gegen dem einen Theil AF verhalten, wie AB 4 Theile, gegen dem einen begehrten Theil A C.

Die 10. Propoſition.

Eine gegebene Linie *AE*, nach einer

andern gegebenen getheilten Linie AD, in gleiche Proportion zu theilen.

Operatio.

Nachdem die getheilte Linie AD, nach gefallen an die Linie AE von A biß D (als einen Winckel DAE formirende) gebracht worden, ziehe DE, ferner aus C und B, mit DE parallel die CF und BG, ſo wird hierdurch AE behörig abgetheilet ſeyn.

Beweiß.

Weil CF und BG mit DE parallel, ſo wird in Triangel ADE [2. 6.] ſich AB gegen AG, und BC gegen GF, item, CD gegen FE, wie AD gegen AE ſich verhalten. So zu beweiſen war.

Die 11. Propoſition.

Zu zweyen gegebenen Linien AB und BC, die dritte folgende proportionirte zu finden.

Operatio.

Formire nach Gefallen dem Winckel DAF, dann trage in ſolchen Winckel die AB von A biß B und daran die BC, ſodann trage auch die BC von A biß E, ziehe BE, und ferner aus C mit BE parallel die CG, ſo wird EG die begehrte 3te proportionirte Linie ſeyn.

Be-

Beweiß.

Weil BE mit CG parallel, ſo wird [2. 6.] AB gegen BC, wie AE (ſo gleich BC) gegen EG ſich verhalten.

In Zahlen.

AB ſey 16. und BC 12. kommt vor die dritte ſuchende 9. welches alſo berechnet wird:

16 , , 12. was 12.

Fac. 9. vor EG.

Die 12. Propoſition.

Zu dreyen gegebenen Linien AB, BC, und AD, die vierte in continuirender Proportion zu finden.

Operatio.

Mache nach gefallen einen Winckel (CAE) daran trage aus dem Eck auf die eine Seite die Linie AB, und auf die andere Seite die Linie AD, ziehe BD, dann trage die Linie BC an die Linie AB, von B biß C, und ziehe aus *C* parallel mit BD die CE. So wird DE die begehrte vierte proportionirte Linie seyn.

Beweiß.

Weil BD mit CE parallel, ſo wird ſich [2. 6.] AB gegen BC verhalten/ wie AD gegen DE. So zu beweiſen war.

In

In Zahlen.

AB ſey 100. BC 65. und AD 80.

Die vierte ſuchende, wird alſo berechnet.

wie AB 100, zu BC 65. alſo AD 80. zu DE.

kommt DE 52.

Die 13. Propoſition.

Zwiſchen zweyen gegebenen geraden Linien AB und BC, eine mitlere proportionirte (BD) zu finden.

Operatio.

Man füge beyde AB und BC in eine gerade Linie AC zuſammen, und theile AC [10. 1.] in 2. gleiche Theil in E, aus E in der Weite EA beſchreibe einen halben Circkel ADC, ſtelle in B die perpendicular-Linie (biß zur Circumferenz) BD. ſo wird dieſe BD die mittlern proportionirte, oder das Medium proportionale zwiſchen AB und BC ſeyn.

Beweiß.

Ziehe AD und DC, ſo werden [8. 6.] alle 3. Triangel ADC, ADB und BDC einander gleich proportionirt ſeyn/ und dahero AB gegen BD, wie DB gegen BC ſich verhalten.

In Zahlen.

AB ſey 25. und BC 9.

Die mittlere proportionirte oder das Medium proportionale wird alſo berechnet.

AB

AB 25 mit BC 9. multipl.

bringt 225. Hieraus die Quadrat-Wurtzel extrahirt.

giebt 15. vor die mittlere proportionirte (BD.

Die 14. Propoſition.

Gleich groſſe Parallelogramma ſo einerley Winckel gemein haben, deren Seiten ſeynd wiederſinns (reciproce) oder verkehrt proportionirt. Und wenn Parallelogramma gleiche Winckel haben, und deren Seiten zugleich verkehrt proportionirt, die ſeynd auch gleicher Gröſſe.

Erklärung.

Die Parallelogramma AEHC, und HDGF, ſo gleich groß / haben commune oder gleiche Winckel CHE = FHD. Dahero verhält ſich die Seite AE gegen HD, wie die Seite DG gegen EH.

Beweiß.

1. Satz. Man bringe beyde Parallelogramma zuſammen, alſo: Daß CHD eine gerade Linie ſey. Ferner AE und GD verlängert, welche in B zuſammen ſtoſſen, ziehe auch CE, und FD.

In

In Betrachtung, daß BG und EF, ingleichen AB und CD parallel, und [Prop.] der Triangel ECH mit HDF gleicher Gröſſe. So wird [1. 6.] das Parallelogram AH gegen dem Parallelogram BH ſich verhalten, wie CH gegen HD. item, das Parallelogram GH gegen eben daſſelbe Parallelogram BH, wie FH gegen HE. Das iſt, die Seite CH (des Pgr. AH) gegen der Seite HD (des Pgr. GH) wie die Seite FH (des Pgr. GH) zu der Seite HE (des Pgr. AH) und alſo wiederſinns.

2. Satz. Iſt aus vorhergehenden offenbar. Daß wenn gleich groſſe Parallelogramma ihre Seiten reciproce proportionirt haben, und unter gleichen Winckeln liegen, ſo werden ſie auch gleicher Gröſſe ſeyn, welches alſo keines a parten Beweiſes benöthiget.

In Zahlen.

AE ſey 20. HE 9. HD 15. DG 12.

Dahero wie AE 20. zu HD 15. alſo DG 12. zu HE 9. Und iſt iedes Parallelograms Inhalt 180.

Die 15. Propoſition.

An denen Triangeln (ABC, und CDE) welche von gleichen Inhalt, und gleiche Winckel (BCA = DCB) haben. Deren Seiten, ſo von die gleichen Winckel begriffen, ſeynd wiederſinns gegen ein-

einander proportionirt. (Das iſt CB zu CE, wie CD zu CA.)

Wenn nun einige Triangel, ſo einen gleichen Winckel haben, die Seiten welche die gleichen Winckel beſchlieſſen, wiederſinns proportionirt, ſo ſeynd ſolche Triangel gleicher Gröſſe oder Inhalts.

Beweiß.

1. Satz. Man laſſe gelten, daß ACD eine gerade Linie ſey, und ziehe BD.

So wird ſeyn [1. 6.] wie der Triangel DBC gegen dem Triangel CBA, alſo DC gegen AC. Item, der Triangel BDC gegen dem Triangel CDE (welcher = dem Triangel CBA) wie BC gegen CE, welches alſo die bewieſene wiederkehrliche Verhältniß iſt.

2. Satz. Weiln das vorhergehende wahr, ſo muß auch dieſes vice verſa ſeine Richtigkeit haben. Daß die Triangel, deren Seiten gleichen Winckels wiederſinns proportionirt, gleicher Gröſſe ſind.

Die 16. Propoſition.

Wenn 4. rechte Linien AB, CD, DE, AG, proportionirt ſeyn. So iſt das Rectangulum oder recht-wincklichte 4. Eck AH von der erſten und vierten (AB und AG) beſchloſſen. Gleich dem

Re-

Rectangulo oder Parallelogram CE, von der andern und dritten (CD und DE) beſchloſſen.

Und wenn 4. rechte Linien alſo beſchaffen, daß das Rectangulum von der Erſten und Vierten beſchloſſen, gleich dem Rect. von der Andern und Dritten beſchloſſen, ſo werden ſolche 4. Linien proportionirt ſeyn.

Beweiß.

1. Satz. Weil AB gegen CD, wie DE gegen AG, und alſo wiederſinns proportionirt ſeynd, ſo werden ſolche Rectangula oder Parallelogramma [14. 6.] auch gleicher Gröſſe ſeyn.

2. Satz. Iſt vorherg. wahr, ſo wird auch dieſes ſeine Richtigkeit haben, daß [14. 6.] bey derer Figuren gleicher Gröſſe, und ihrer Seiten wiederkehrlichen Verhältniß, ſolche Seiten proportionirt ſeyn werden.

Die 17. Propoſition.

Wenn 3. rechte Linien AB, CD und AE, in continuirlicher Proportion ſtehen. So iſt das Quadrat von der mittlern Linie (CD) eben ſo groß, als das Rectangulum von der erſten und dritLinie (AB und AE) beſchloſſen.

Und

Und wenn ein Rectangulum von der erſten und dritten Linie beſchloſſen, gleich dem Quadrat der mittlern Linie, ſo werden ſolche 3. Linien in continuirlicher Proportion ſtehen.

Beweiß.

Wenn die andere CD, in der Ordnung 2. mal geſetzet wird/ ſo iſt wie deutlich zu ſehen, dieſe Propoſ. vorhergehender 16. Prop. gantz conform, und dahero daſelbſt allbereit bewieſen.

In Zahlen.

Wird ſolches etwas deutlicher erhellen.

AB ſey 16. CD 12. AE 9. Iſt alſo CD das Medium proportionale. Und dahero das Quadrat von CD 144. gleich dem Inhalt von Parallelogram EB 144.

Die 18. Propoſition.

Auf eine gegebene gerade Linie AB, eine recht-liniſche Figur (AFGB) zu beſchreiben, welche einer gegebenen recht-liniſchen Figur CDEB gleichförmig ſey.

Operatio.

Erlängere BC gegen C hinaus, und ziehe aus B durch D eine Linie, erlängere auch BE, bringe die Linie AB von B biß A. Dann ziehe aus A mit CD parallel die AF, ferner aus F parallel

mit DE die FG, ſo wird AFGB die begehrte Figur ſeyn.

Beweiß.

Dieweil AF und DC, item FG und DE einander parallel, ſo iſt [2. 6.] der Triangel BDC dem Triangel BFA gleichförmig. Auf dergleichen Art iſt der Triangel BDE gleichförmig dem Triangel BFG, folglich auch ſummariter [1. 5.] die Figur BCDE gleichförmig der Figur BAFG. So zu beweiſen war.

Die 19. Propoſition.

Gleichförmiger Triangel (ABC und DEF) Proportion (verſtehe nach ihren Inhalt,) iſt doppelte Verhältniß (id eſt quadrirte) gegen der Proportion ihrer proportionirten Seiten.

Erklärung.

Des Triangels DEF Verhältniß, gegen dem gleichförmigen Triangel ABC ſtehet [10. Def. 5.] oder iſt doppelt der gleich proportionirten Seiten. Zum Ex. wie AB (8) zu DE (24) alſo DE (24) zu der folgenden, kommt 72.

ſtehet alſo

einfache Verhältniß doppelte Verhältn.

AB 8 (wie 1 gegen 3) DE 24. - - 72

|________ wie 1 gegen 9 ________|

Wie

Wie dahero 8. gegen 72. oder 1 gegen 9 ſich verhält/ alſo verhält ſich auch der Triangel ABC gegen dem Triangel DEF.

Beweiß.

Suche nach DF 18. und AC 6. [11. 6.] die dritte gleichverhaltende, die iſt DG 2. ziehe EG. Weiln DE (24) gegen DF (18) wie AB (8) gegen AC (6) ſo wird auch verwechſelt ſeyn [16. 5.] DE (24) gegen AB (8) wie DF (18) gegen AC (6) Da nun DF (18) gegen AC (6) wie AC (6) gegen DG (2) gemachet worden. So wird auch [11. 5.] DE (24) gegen AB (8) ſeyn, wie AC (6) gegen DG (2) Das iſt, derer Triangel DEG und ABC ihre, von denen gleichen Winckeln EDG und BAC begriffene Seiten ED und DG, item, AB und AC ſeynd wie zu ſehen wiederſinns proportionirt, und dahero beyde Triangel [15. 6.] gleich groß. Folglich der Triangel DEF gegen ABC (der = DEG) wie der Triangel DEF gegen DEG. Und der Triangel DEF gegen dem Triangel DEG [1. 6] wie DF (18) gegen DG (2.)

Nun iſt gleich Anfangs oben DF (18) AC (6) und DG (2) in continuirlicher Proportion formiret worden. Dahero DF gegen DG 2. mahlige Verhältniß, conſequenter ſtehet der Triangel DEF gegen dem Triangel DEG (welcher = ABC) in 2. mahliger oder doppelter Verhältniß, derer Seiten DF gegen AC.

Nota, zum Beweiß dieſer 19. Propoſ. ſeynd mit guten Bedacht die Zahlen mit zu Hülffe genommen worden, weiln anders dieſe Propoſition, durch Linien allein etwas dunckel zu verſtehen, da beſonders ein Incipient gar leicht auf die Meinung gerathen könte, als hätte der Triangel DEF gegen dem Triangel ABC in Betracht der Seite DF gegen AC die doppelte Verhältniß alſo: Weil der Seite DF (18) gegen AC (6) Verhältniß wie 3 gegen 1. ſolches doppelt genommen, wäre wie 6. gegen 1. Dieſem nach ſich des Triangels DEF Inhalt, gegen des Triangels ABC Inhalt, in ſolcher vermeinten doppelten Verhältniß verhielte, wie 6 gegen 1. welches aber irrig und falſch! Indem (wie bey obiger Erklärung gleich Anfangs zu ſehen,) vielmehr die Verhältniß wie 9. gegen 1. Daß dannenhero des Triangels DEF quadrirter Inhalt 9. mahl ſo groß, als des Triangels ABC (das iſt die einfache 3. mahlige Verhältniß muß quadrirt, oder mit ſich ſelbſt nehmlich 3 mit 3 multiplicirt werden.)

Es iſt dieſer 19. Propoſition eigentlicher Verſtand und Beweiß wohl zu obſerviren. Denn hierauff fundiret ſich aller gleichförmigen Flächen Verwandelung, Addirung, Subtrahirung, Multiplicirung, Dividirung und Proportionirung. Folglich auch (vermöge vorhergehender 10. Definition des 5. Buchs) die Operation derer gleich proportionirten Cörperlichen Figuren.

Solches

Solches nun mit ein paar Exempeln zu erläutern, ſey

Das erſte Exempel.

Geſetzt! es wären zwey Städte in gleicher Figur oder Proportion ſituiret. Die kleine Stadt wäre breit 600. Schritt. Die groſſe Stadt hingegen hielte die Breite in dergleichen Proportion 3600. Schritt.

Wenn nun in der kleinen Stadt enthalten 2. Kirchen, 700. Häuſer, und 6000. Inwohner. So wäre die Frage! wie viel nach ſolcher Proportion in der groſſen Stadt an Kirchen, Häuſern, und Inwohnern ſeyn könten, Facit 72. Kirchen, 25200. Häuſer, und 216000. Inwohner: Und würde die kleine Stadt in der gröſſern 36. mahl ſtehen können.

Und diß 36. mahl iſt eben die 2. mahlige oder doppelte, das iſt quadrirte Verhältniß der kleinen gegen der gröſſern Stadt. Und ſtehet die Verhältniß alſo:

Wie 600. Schritt zu 3600. Schritt, alſo 21600. das iſt wie 600. gegen 21600. oder wie 1. zu 36.

Das zweyte Exempel.

Geſetzt! ein Fiſch in Form eines Wallfiſches von 1. Elen lang, wäge oder ſey ſchwer 6. Pfund, Iſt die Frage! wie ſchwer ein dergleichen Wallfiſch ſeyn würde, der 120. Elen lang wäre. Facit 10368000. Pfund, das iſt gegen 103680.

Centner, (dem Centner zu 100. Pfund gerechnet.)

Item, wenn des kleinen Fiſches Gröſte, Bauch, Grete, 20. Stück 1. Loth ſchwer. Iſt gleichfalls die Frage! wie ſchwer bey ſolcher Bewandniß nach Proportion, des Walfiſches Gröſte, Bauch, Grete ſeyn werde? Facit 2700. Pfund, oder 27. Centner.

Dieſe Berechnung beſtehet in einer 3. fachen (ratio triplicata) oder Cubiſchen Verhältniß, nehmlich:

Wie 1. Ele gegen 120. Elen alſo 14400. Elen zu 1728000. Elen, dahero ſtehet der groſſe Fiſch, gegen dem kleinen Fiſch, in Proportion der Corpulenz, wie 1. gegen 1728000. das iſt, der groſſe Fiſch, und alle deſſen Theile, ſeynd iedes nach Proportion allezeit 1728000. mahl ſo ſchwer, als des kleinen Fiſches.

Die 20. Propoſition.

Gleich proportionirt vieleckichte recht-liniſche Figuren ABCDEF, und GHIKLM, können in gleich viele proportionirte Triangel (welche in ſolchen Figuren zu ſehen,) abgetheilt werden. Es ſeynd auch dergleichen Triangel gegen die Figuren proportionirt. Ebenfalls ſtehen die Figuren mit die gleich proportionirten Seiten (als AF und GM) in doppelter Verhältniß.

Be-

Beweiß.

Weil der Winckel ABC = GHI, und AB gegen BC wie GH gegen HI, ſo ſeynd [6. 6.] beyde Triangel ABC und GHI gleichwincklich, und wegen der gleichen Winckel auch [4. 6.] gleichförmig.

Ein gleiches iſt von denen übrigen Triangeln zu verſtehen. Dahero auch [12. 5.] alle Triangel der einen Figur ſämtlich, gegen denen Triangeln der andern Figur ſämtlich, das iſt, die Figur ABCDEF, gegen der Figur GHIKLM, [19. 6.] in doppelter Verhältniß der Seite AF gegen der Seite GM, ſtehet.

Die 21. Propoſition.

Alle recht-liniſche Figuren (A und B) ſo einer andern recht-liniſchen Figur (C) gleich proportionirt ſeyn. Die ſeynd auch alſo unter ſich gegeneinander proportionirt.

Beweiß.

Diß iſt eben vorhergehende 20. Propoſition und was dort von 2. Figuren geſaget und bewieſen worden, hier von 3. Figuren zu verſtehen.

Die 22. Propoſition.

Wenn 4. rechte Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt, ſo ſeynd die gleich-

förmige Figuren auf ſelbige beſchrieben, auch proportionirt.

Und wenn dergleichen 4. recht-liniſche Figuren alſo proportionirt ſeyn, ſo ſeynd auch derſelben 4. rechte Linien proportionirt.

Erklärung.

Die 4. Linien ſeynd alſo proportionirt, wie AB 6. zu CD 8. alſo EF 9. zu EH 12. Dahero ſagt man, daß der Triangel AIB gegen dem gleichförmigen Triangel CKD proportionirt, gleich als das Quadrat EFML gegen dem Quadrat GHON.

Und alſo verwechſelter oder verkehrter Weiſe, daß wenn 4. Figuren alſo proportionirt ſeyn, ſo ſeynd auch die 4. rechte Linien proportionirt.

Beweiß.

1. Satz. Wie beyde Triangel AIB und CKD, [19. 6.] in doppelter Verhältniß ihrer beyden Seiten AB und CD. Alſo ſtehen auch beyde Quadrata EFML und GHON, [20. 6.] in dergleichen Verhältniß.

Dahero beyde Triangel [11. 5.] die Verhältniß = denen beyden Quadraten gleich haben.

2. Satz. Iſt ietzt erwehntes war, ſo müſſen verwechſelt oder wiederſinns bey 4. proportionirten Figuren, auch [20. 6.] deren 4. rechte

rechte Linien oder Seiten alſo proportionirt ſeyn.

Die 23. Propoſition.

Parallelogramma *AC* und GE ſo unter gleichen Winckeln BAD = FEH beſchloſſen, verhalten ſich gegen einander, als die Multiplication derer Seiten, (welche die gleichen Winckel beſchlieſſen,) austräget.

Erklärung.

Beyder Rectangula oder hier recht wincklichten Parallelogrammen AC und EG Vermögen oder Inhalt, iſt gegen einander, als wie AB mit AD multiplicirt, ſich gegen EH mit EF multiplicirt, ausmachet.

Nota, diß iſt auch von nicht rechtwincklichten oder gleich verſchobenen Parallelogrammen alſo zu verſtehen.

Beweiß.

In Betrachtung, da eines ieden recht-wincklichten Parallelograms Inhalt, durch Multiplicirung einer Seite in die andere, berechnet wird. Alſo folgt! daß auch deren Inhalt, ſich gleich denen in einander multiplicirten Seiten, proportioniren oder verhalten müſſe.

Gleiche Bewandniß hat es auch [20. 6.] mit denen nicht recht-wincklichten, iedoch gleichförmigen Parallelogrammen.

Die 24. Propoſition.

In ieglichen Parallelogram ABCD, ſeynd die Parallelogramma, welche umb den Diameter AC ſtehen, (AHFI und FECG) einander, und auch dem gantzen Parallelogram (ABCD) gleichförmig.

Beweiß.

Weil AB und EI, ingleichen AD und HG, einander parallel. So iſt der Winckel BAD [29. 1.] = dem Winckel EFG, item, AHF = FEC. Folglich [20. 6.] ſeynd dieſe Parallelogramma unter ſich, als auch mit dem gantzen gleichförmig. So zu beweiſen war.

Die 25. Propoſition.

Eine recht-liniſche Figur (FGHIE) zu beſchreiben oder alſo zu machen: Daß ſelbige einer recht-liniſchen Figur ABCDE, gleichförmig, auch zugleich mit einer andern fürgegebenen recht-liniſchen Figur K gleicher Gröſſe ſey.

Operatio.

Mache das Quadrat ELMN [14. 2.] = der Figur ABCDE. Ferner auch das Quadrat EOPQ [44. 1.] = der Figur K. Dann ziehe AN, ingleichen von Q mit AN parallel die

Q F.

QF. ſo wird FE eine zu AE proportionirte Seite, der begehrten Figur ſeyn. Welche dann vollends [18. 6.] der Figur ABCDE gleichförmig zu machen, welches die Figur FGHIE, (ſo der Figur K an Gröſſe gleich,) abgeben wird.

Beweiß.

Das Quadrat EM iſt [14. 2.] = groß der Figur ABCDE, Hierdurch auch das Quadrat EP = der Figur K.

Ferner iſt EN gegen EQ [2. 6.] wie EA gegen EF. Dahero iſt auch EN zu EQ, wie EA zu EF. Und folglich [22. 6.] das Quadrat EM zum Quadrat EP, wie die Figur ABCDE zu der Figur FGHDE, oder verwechſelt [16. 5.] wird das Quadrat EM zur Figur ABCDE, ſich verhalten, wie das Quadrat EP, zur Figur FGHJE.

Die 26. Propoſition.

Wenn man von einem Parallelogram ABCD, ein anderes mit demſelben gleichförmiges ECGF, und welches auch einen commun Winckel (ECG) hat, abziehet. So wird dergleichen Parallelogram an den Diameter AC ſtehen.

Beweiß.

Wenn das Parallelogram dem commun Winckel ECG nicht haben ſolte, ſo könte es auch [1. def. 6.] dem Parallelogram ABCD nicht gleich för-

förmig genennet werden. Dahero wegen ſolchen commun Winckels wird es auch [24. 6.] an Diameter AC ſtehen.

Nota, dieſe 26. Propoſition will faſt unvollkommen ſcheinen. Denn da es heiſſet, wenn man das Pgr. ECGF abziehet: So ſolte billig ferner des Reſts gedacht werden: Welches aber nicht geſchiehet? Als habe, weiln es überall alſo proponirt gefunden, auch dabey gelaſſen. Sonſt aber weiln es vermuthlich vorhergeh 24. Prop. vice verſa bedeuten ſoll. könte die Propoſition hier alſo heiſſen.

Wann man von einem Parallelogram ABCD, ein anderes mit demſelben gleichförmiges ECGF, und welches auch einen commun Winckel (ECG) hat, abziehet. So wird das reſtirende Parallelogram (HJ) dieſen abziehenden, wie auch dem gantzen (BD gleichförmig ſeyn, und ſämtlich an Diameter (AC) ſtehen.

Hier bliebe der Beweiß in ſeinen Werth und were vorherg. 24. Prop. gantz conform.

Die 27. Propoſition.

Bey allen Parallelogrammen, welche auf eine rechte Linie AB (die bey C in 2. gleiche- und bey F in 2 ungleiche Theile zertheilt worden) alſo geſtellet werden, nem-

nemlich: eines auf die Helffte AC (als EC) dann eines auf den kleinen Theil AF, gleichförmig EC und an deſſen Diameter AD ſtehende, (iſt AG) ferner eines auf des gröſſern Theil FB (iſt GB) So wird das Parallelogram EC (welches auf der halben Linie AC ſtehet) allezeit gröſſer, als das Parallelogram GB (welches auf den gröſſern Theil FB ſtehet) ſeyn.

Beweiß.

Weiln AC = CB, ſo iſt das rectangulum oder Pgr. AH [35.1.] = HB. Ferner GC [43.1] = EG. Dahero iſt HB + GC = AH + EG. Folglich: Das Parallelogram EC [5.2.] gegen dem Pgr. GB allezeit gröſſer, um das kleine Parallelogram GD. So zubeweiſen war

Die 28. Propoſition.

Auf eine gegebene gerade Linie AB, zwey Parallelogramma alſo zuſtellen, daß das abgehende (auf AC) mit einer gegebenen geradliniſchen Figur D gleich groß. Das übertreffende (auf CB) aber, einem gegebenen Parallelogram E gleichförmig ſey. (Jedoch muß die gegebene rechtliniſche Figur D nicht gröſſer alß das Parallelogram, ſo auf die halbe Linie

Linie AB, der Figur D gleich, könte gemachet werden, ſeyn.)

Operatio.

Auf FB der Helffte AB, formire das Parallelogram JHGB gleichförmig [18. 6.] mit E, dann mache auch das Parallelogram JKLM, mit D = groß, und dem E gleichförmig. Ferner beſchreibe auf GB einen halben Circul, darein trage die mit HF correſpondirende Linie KI von G bis N. Nimm den Reſt BN, und trage ſolche Linie von H bis O. Ziehe letzlich dem Diameter HB. weiter aus O die PORQ, parallel mit AB, ſo dann aus R, die CRS parallel mit BG, So wird das Parallelogram AR mit der Figur D = groß, und CQ mit E gleichförmig ſeyn.

Beweiß.

1. Satz. Weil [31. 3.] GNB ein rechter Winckel, und KI mit HF oder GB in proportion des Parallelograms IL und FG, ſo wird [47. 1. und 20. 6.] NB ſeyn HO, des Parallelograms OS als der Uberſchuß des Parallelogrrms IL (von Parallelogram FG abgezogen.) Wenn man dieſem nach verkehrt, das Parallelogram OS von FG wieder abziehet, ſo wird der Gnomon FRBS dem Parallelogram IL oder = D übrig bleiben.

Nun iſt durch dem Beweiß vorhergehender 27. Propoſ. erwieſen, daß gedachter Gnomon FRBS mit dem Parallelogram AR = groß. Dahero auch = groß der Figur D. So zubeweiſen war.

2. Satz.

2. Satz. Auch iſt [24.6.] das Parallelogram CQ mit E gleichförmig.

Die 29. Propoſition.

Auf eine gegebene gerade Linie AB, ein übertreffendes Parallelogram (AN) einer gegebenen rechtliniſchen Figur C = groß zumachen, alſo: daß der Überſchuß BN, einem gegebenen Parallelogram D gleichförmig ſey.

Operatio.

Theile AB in 2 gleiche Theile in E, und mache auf EB [18.6.] das Paralleloggram EG gleichförmig D. Desgleichen auch [25.6] das Parallelogram FHNI = dem Parallelogram EG + der Figur C. Durch die Erlängerung NH wird formiret das Parallelogram AN ſo der Figur C gleich groß, und ML wird gleichförmig D.

Beweiß.

Weil AE = EB, ſo iſt das Parallelogram KE = HB, item, [43.1.] = BI. Nimm von Gnomon ANG hinweg KE oder BI, ſo wird AN = den Gnomon ENG übrig bleiben. Nun iſt das Parallelogram HI = EG + der Figur C gemachet worden. Dahero iſt der Gnomon als Uberſchuß = der Figur C = AN. So zu erweiſen war.

Die

Die 30. Propoſition.

Eine gegebene rechte Linie AB propor-portionirt, daß iſt (in G) nach der mit-lern- und äuſerſten Proportion zu-theilen.

Operatio.

Dis iſt albereit durch die 11. Propoſition des 2 Buchs verrichtet, auch daſelbſt bewieſen wor-den.

Die 31. Propoſition.

Wenn auf eines recht-wincklichten Triangels ABC 3 Seiten, gleichförmi-ge Figuren gemacht werden. So wird die Figur E auf der längſten Seite unter dem rechten Winckel (hypothenuſa BC) eben ſo groß ſeyn, als die andern beyde Figuren F und G zuſammen.

Beweiß.

Weil das Quadrat auf BC [47. 1.] ſo groß, als beyde Quadrata auf AC und AB zuſammen. Auch dieſes [20. 6.] von allen gleichförmigen Fi-guren zu verſtehen. Als iſt die Figur E eben ſo groß, als beyde F und G zuſammen, So zube-weiſen war.

Die 32. Propoſition.

Wenn zwey Triangel ABC und

CDE,

CDE, deren zwey Seiten proportionirt (daß iſt AB zu BC, wie CD zu DE) alſo an einander geſtoſſen werden, daß ſie einen Winckel BCD machen, auch erwehnte proportionirte Seiten einander parallel kommen. So werden die 2 übrigen Seiten AC und CE eine gerade Linie machen.

Beweiß.

In Betrachtung derer Parallel-Linien iſt [29. 1] der Winckel BAC = DCE, und ACB = CED. ebenfals ABC = CDE = BCD. Dieſemnach die 3. Winckel bey C = denen 3 Winckeln des Triangels ABC oder CDE. Folglich [32. 1.] gleich 2. rechten Winckeln. Dahero AC + CE [14. 1.] in gerader Linie AE.

Die 33. Propoſition.

In gleichen Circuln, verhalten ſich die Winckel, (ſie mögen nun in Centro oder in der Circumferenz ſtehen) gegen einander, wie die Theile der Circumferenz, worauf ſelbige ſtehen.

Erklärung.

Beyde Circul ſeynd gleich groß. Dahero wie der Winckel A gegen B, alſo auch der Winckel C gegen D. oder auch die Circumferenz EF gegen GH.

Beweiß.

Mache FI = EF, und HK = GH. Ziehe EF, FI. ingleichen GH und HK, item CI und DK.

In Anſehung, daß die halben Diameter alle einander gleich, und wegen der gleichgemachten Winckel aus Centro, ſeynd [4. und 5. 1.] alle dieſe Triangel gleichfüßig, und wird ſich [15.5.] EI gegen EF, wie der Winckel ICE gegen FCE verhalten. item, wie EI gegen EF, alſo GK, gegen GH. Ferner der Winckel ECF gegen GDH, wie ECJ gegen GKD. verhalten. Weiln nun die Winckel in Centro [20. 3.] 2 mal ſo groß, als an der Circumferenz; als iſt von denen Winckeln an der Circumferenz ein gleiches zu verſtehen, und damit erwieſen.

Des ſechſten Buchs Ende.

Das

Das Siebende Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1.

DJe Unität iſt, welches Eins/1/ genennet wird.

Von einen ieden Ding oder Sache, zum Ex. 1. Ele 1 Ruthe, 1 Thaler ꝛc.

2. Die Zahl aber iſt welche aus vielen Unitäten zuſammen geſetzet wird.

Zum Ex. 6 oder 6 Elen 6 Thaler ꝛc.

3. Ein Theil, iſt eine Zahl, von einer andern Zahl, eine kleinere der gröſſern, nemlich da die kleine Zahl die gröſſere miſſet.

Zum Ex. die Zahl 3 iſt ein Theil von der Zahl 12 nemlich der 4te Theil, und miſſet die kleinere Zahl 3 die gröſſere 12 gleich 4 mal.

4. Theile ſind, da die kleinere Zahl die gröſſere nicht juſt ausmiſſet.

Alſo ſind 8 der gleiche Theile der Zahl 12 nemlich $\frac{2}{3}$ theile, und kan 8 in 12. ſonder Reſt nicht dividiret werden.

5. Mannichfaltig iſt, das groſſe von einen klei-

kleinen, da das gröſſere von den kleinern gemeſſen wird.

Alſo iſt die Zahl 24 mannichfaltig gegen der Zahl 4 nemlich 6 mal, und miſſet das gröſſere 24 das kleinere 4. gleich 6 mal aus.

6. Die gleiche Zahl iſt, welche durch 2 kan zertheilet werden.

Alſo iſt 24 eine gleiche Zahl item 14. weil iede durch 2 ſonder Reſt kan dividiret werden.

7. Eine ungleiche Zahl iſt, welche nicht mit 2 kan dividiret werden, oder welche gegen der gleichen Zahl allezeit um eine Unität oder 1. differirt oder unterſchieden.

Alſo iſt 23 und 15 iede eine ungleiche Zahl, weil ſie nicht in 2 Theil ſonder Reſt können dividiret werden.

8. Einer gleichen Zahl gleiche Zahl iſt, welche gleiche Zahl, eine gleiche Zahl gleich ausmiſſet.

Alſo iſt 48 eine ſolche gleiche Zahl, der gleichen Zahl 12. und wird die gleiche Zahl 48 durch die gleiche Zahl 12. 4 mal, das iſt gleich, und nicht ungleich ausgemeſſen.

In ſumma eine iede Zahl, die aus 2. gleichen Zahlen in einander multipliciret.

9. Der ungleichen Zahl gleiche Zahl iſt, welche gleiche Zahl eine ungleiche Zahl gleich abmiſſet.

Alſo iſt der ungleichen Zahl 15 gleiche Zahl 30, welche gleiche Zahl 30 von der ungleichen Zahl 15. 2 mal, das iſt gleich gemeſſen wird. Kurtz! alle Zahlen, aus einer

gleich

gleich und ungleichen in einander multiplicirt.

10. Der ungleichen Zahl ungleiche Zahl iſt, welche ungleiche Zahl, eine ungleiche Zahl, ungleich abmiſſet.

Dergleichen Zahl iſt 35 von der ungleichen Zahl 7 welche ungleiche Zahl 35 die ungleiche Zahl 7 ungleich, nemlich 5 mal abmiſſet. In ſumma eine iede Zahl die aus 2 ungleichen Zahlen in einander multiplicirt/entſtehet.

11. Eine Prim Zahl iſt, welche von der Unität nur allein gemeſſen wird.

Alſo iſt 3. 5. 7. 11. 13. &c. iede eine Prim Zahl/ als welche nur mit 1. daß es juſt aufgehe, können dividiret oder gemeſſen werden.

12. Prim Zahlen unter ſich oder gegen einander ſind, welcher algemeines Maaß allein die Unität iſt.

Alſo ſind 7. 11. 15. Prim Zahlen unter ſich, weil hierzu kein ander Maaß oder algemeiner diviſor ſeyn kan, als die Unität oder 1.

13. Numerus Compoſitus oder eine zuſammen geſetzte Zahl iſt, welche etwa eine Zahl ausmiſſet.

Dis ſind mit einem Worte alle andere Zahlen, ſo nicht Prim Zahlen ſind, nemlich 4.6.8.9.10.12.14.15.16.18 &c.

14. Compoſiti oder unter ſich zuſammen geſetzte Zahlen ſind, welche ein algemeines Maaß abmiſſet.

Alſo ſind 12. 16 zwey dergleichen Compoſiti, weil ſelbige durch 2 oder 4 können abgemeſſen werden item 16. 24. 32. ſind dergleichen Zahlen, und ſo fort ꝛc.

15. Eine Zahl multiplicirt die andere ſolcher geſtalt, nemlich da der Multiplicandus ſo vielmal addirt wird, als viel Unitäten in multiplicande enthalten, und dadurch eine Zahl herausgebracht wird.

Zum Ex. 7 mit 8 multiplicirt, dürffte 7 nur 8 mal unter einander geſetzet, und addiret werden.

Hieraus folgt, daß bey einer ieden Multiplication, die Unität gegen den multiplicande ſich verhält, gleich als der Multiplicandus gegen den herauskommenden Product.

Als 7 mit 8 multiplicirt thut 56. iſt alſo 1 gegen 8. gleich wie 7 gegen 56.

16. Zwey Zahlen in einander multipliciret, wird das Product eine flache Zahl genennet. Welche Zahlen aber ſich einander multipliciren, werden derſelben Seiten-Zahlen genennet.

Alſo 4 und 6 in einander multipliciret bringt 24 eine flache Zahl, iſt ſo viel als ein Parallelogram, von 6 lang und 4 breit in einander multiplicirt bringt 24. der Fläche Inhalt.

Und ſind dahero 6 und 4 Seiten Zahlen, gegen der Zahl 24 zu rechnen oder zu nennen.

17. Drey Zahlen in einander multipliciret, wird

wird das Product eine Cörperliche Zahl genen- net. Und dieſer Cörperlichen Zahl, in einander multiplicirte Zahlen, werden Seiten Zahlen ge- nennet.

Alſo 6. 4. 16. in einander multipliciret bringt 384 eine Cörperliche Zahl, iſt ſo viel als ob es ein Prisma 6 lang 4 breit und 16 hoch were, zum Cörperlichen Inhalt 384 heraus bringet.

Und dahero ſind 6. 4. 16. dieſer Cörper- lichen Zahl 384 ihre Seiten Zahlen, das iſt des Cörpers Seiten.

18 Eine Quadrat-Zahl iſt, da eine Zahl mit ſich ſelbſt multiplicirt wird.

Alſo iſt 64 eine Quadrat-Zahl, nemlich 8 mit 8 multiplicirt.

19. Eine Cubiſche Zahl iſt, da eine Zahl 3 mal in einander multipliciret wird.

Zum Ex. 216 iſt eine cubiſche Zahl, da 6 mit 6 und die herauskommende 36 wieder mit 6 multipliciret worden.

20. Gleich proportionirte Zahlen ſind, da die erſte gegen der andern ſich verhält, gleichwie die dritte gegen der vierten. Oder da ein gewiß Theil der erſten Zahl die andere abmiſſet, gleich wie eben daſſelbe Theil der dritten Zahl die vierte Zahl abmiſſet, oder auch verkehrter Weiſe.

Dergleichen proportionirte Zahlen ſeind 8. 12. 16. 24. da 8 gegen 12. gleich wie 16 gegen 24 ſich verhält. Oder da der vierte

Theil von 8 nemlich 2 die 12 abmiſſet 6 mal/ gleich wie der 4te Theil von 16 nemlich 4 die 24 auch 6 mal ausmiſſet.

21. Gleiche Flach- und Cörperliche Zahlen ſind, ſo proportionirte Seiten haben.

Alſo ſind 24 und 96 gleiche Flach-Zahlen, ſo aus 4 und 6 item 8 und 12 entſtehen.

Item 48 und 162 gleich Cörperliche Zahlen ſo aus 2. 4. 6. item 3. 6. 9. entſtehen.

22. Eine vollkommene oder perfecte Zahl iſt, welche ihren eigenen Theilen gleich.

Dergleichen Zahlen ſind. 6. 28. 496. &c. weil 1. 2. 3. gleich 6. item 1. 2. 4. 7. 14. gleich 28. und 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248 gleich 496 Nota, die folgende 36. Prop. des Neundten Buchs, handelt ausführlich hievon.

23. Eine Zahl hebt die andere auf, durch iede derjenige Zahl beſonders, welche in einander multipliciret worden.

Alſo gehet 48 auf, durch die beyden Zahlen 6 und 8 iede beſonders, als welche in einander multipliciret 48. machen.

Poſtulata.

1. Es iſt möglich, daß man eine iede Zahl oder Zahlen, einer ieden Zahl oder Zahlen gleich nehmen könne.

Alſo kan 4 gleich 4 item 12 gleich 12. und auch 7. 8. 10. zuſammen 25. gleich 7. 8. 10. zuſammen 25 genommen werden.

2. Daß über eine iede Zahl eine gröſſere könne genommen werden.

Die Zahl ſey 30000. ſo kan man drüber nehmen 30001. und ſo fort unendlich.

3. Daß man addiren, ſubtrahiren, multipliciren, dividiren, ingleichen der Flächen und Cörper ihre Wurtzeln extrahiren könne.

Axiomata.

1. Was einer gleichen Zahl gleich kömmet, kommet auch denen übrigen gleichen Zahlen bey.

Die gleichen Zahlen ſeynd 8. 8. 8. 8. &c. diejenige ſo der erſten davon als der 8. gleich kömmt, ſey 8. ſo wird dann ſolche 8. auch denen übrigen gleichen Zahlen, als 8. 8. 8. ieder beſondern gleich kommen.

2. Theile die gleiche Verhältniß haben, zu einen oder einerley Theile, die ſind auch unter einander einerley.

3. 3. 3. 3. &c. verhalten ſich gegen 12.

ieder Theil beſonders, wie 1. gegen 4. darum ſind auch 3.3.3.3. unter ſich einerley.

3. Diejenigen Zahlen, welche einerley Theile ſind gleicher Zahlen, oder eben derſelben Zahl, die ſind auch einander gleich.

4. 4. 4. ſind einerley Theile der gleichen Zahlen 8. 8. 8. oder eben einer dieſer Zahl 8. dahero ſind 4. 4. 4. auch einander gleich.

4. Welche Zahlen einer Zahl gleich ſind, oder zu derſelben gleich oder ungleiche Theile haben, die ſind auch unter einander gleich.

Alſo 6. 6. 6. ſind iede der Zahl 6. gleich, oder haben zu der Zahl 3. gleiche, daß iſt 2. Theile, oder aber gegen der Zahl 2. ungleiche, das iſt 3. Theile.

5. Die Unitæt oder 1. mißet alle Zahlen, ſo viel Unitæten heraus bringend, als in der Zahl enthalten, daß iſt, die Zahl ſelbſt.

1. Miſſet 37. heraus bringend 37. Unitæten, daß iſt die Zahl 37. ſelbſt.

6. Eine iede Zahl miſſet ſich ſelbſt aus/ durch die Unitæt.

7. So eine Zahl (6) eine andere Zahl (8) multiplicirt, eine Zahl (48) heraus bringt, ſo wird der Multiplicande (6) das Productum (48) durch die multiplicirte Zahl (8) ausmeſſen. Die multiplicirte Zahl (8) aber, eben das Productum (48) durch den Multiplicanden (6.)

8. Wenn

8. Wenn eine Zahl (4) die andere (24) ausmeſſen will, ſo muß ſo wohl die Zahl (6) durch welche jene miſſet, die Zahl (24) meſſen, durch dieſelben Unitæten, welche in der meſſenden Zahl (4) ſind/ daß iſt durch die meſſende Zahl (4) ſelbſt.

9. Wenn eine Zahl (8) eine andere (40) ausmeſſend, diejenige Zahl durch welche ſie miſſet, (5) vermehret, oder multipliciret, ſo bringt ſie dieſelbe Zahl (40) hervor, welche ſie ausmiſſet.

10. Wenn eine Zahl (6) andere Zahlen (12. 18. 30.) ausmiſſet, ſo miſſet ſie auch deroſelben zuſammen geſetzte Zahl (60) aus.

11. Welche Zahl (6) von etlichen Zahlen (12. 24. 60.) nur eine Zahl (zum Ex. die 12.) ausmiſſet, die miſſet auch iede Zahl, welche jene (nemlich die 12.) ausmeſſen wird.

12. Eine Zahl (4) die das gantze (24) und auch das weggenommene (8) ausmiſſet, die miſſet auch die übrige Zahl (16) aus.

Die

Die 1. Propoſition.

Wenn bey 2. ungleich gegebenen Zahlen A und B, allezeit die kleinſte B von der gröſſern A, und alſo ferner wechſelsweiſe abgezogen wird. Das übrige aber niemahln das vorhergehende miſſet, biß ſo lange die Unitæt E hervor kommet oder übrig bleibet. So werden die Zahlen A und B unter ſich oder gegen einander prim-Zahlen ſeyn.

Beweiß.

	A 8.
	B 5.
Reſt	C 3.
Reſt	D 2.
Reſt	E 1.
	F 2.

Wenn es nicht wäre, ſo ſolten die Zahlen A und B, die Zahl F zum gemeinen Maaß haben. Müſte alſo F [12. ax. 7.] auch B und C meßen, ingleichen C und D, nicht weniger E, alſo die Unitæt ſelbſt. Daß iſt, die Zahl F ſolte die Unitæt E meßen, ſo [11. Def. 7.] nicht ſeyn kan.

Die 2. Propoſition.

Zweyer gegebenen Zahlen A und B, die nicht prim-Zahlen unter ſich ſeynd, ihr gröſtes allgemeines Maaß (E) zu finden.

Ope-

Operatio.

A	15
B	9
C	6
D	3
E	3

Ziehe B von A, dem Reſt C ſubtrahire von B, ſolchen Reſt D wieder von C, ſo reſtirt E = D. Dahero iſt E das begehrte allgemeine gröſte Maaß zu A und B.

Beweiß.

In Anſehung, daß A und B nicht prim-Zahlen geſetzet worden. Und der Reſt E vorhergehende D miſſet, ſo wird auch E [12. ax. 7.] die D und C, folglich C und B, endlich B und A ausmeſſen. Und dieſem nach das allgemeine gröſte Maaß zu AB ſeyn.

Die 3. Propoſition.

Zu drey gegebenen Zahlen A B und C, ſo nicht prim-Zahlen unter ſich ſeynd, ihr gröſtes allgemeines Maaß zu finden.

A 24. B 16. C 12.
D 8. E 4.

Operatio.

Suche [2. 7.] zu A und B das allgemeine gröſte Maaß D, würde nun D das C meßen, ſo wäre D das ſuchende allgemeine Maaß. Da es aber C nicht mißet, ſo ſuche ferner [2. 7.]

zu

zu D und C das allgemeine Maaß E, welches ſodann A B und C ausmeßen wird.

Beweiß.

Weil D [2. 7.] das allgemeine Maaß zu A und B, und auf ſolche Art auch E das allgemeine Maaß zu C und D, ſo wird [5. ax. 7.] nicht allein E ſich ſelbſt, ſondern auch alle vorhergehende [11. ax. 7.] ABC und D ausmeſſen. Und dahero das allgemeine gröſte Maaß zu A, B und C seyn.

Die 4. Propoſition.

Eine jede kleinere Zahl A, iſt zu einer gröſſern Zahl B, entweder ein Theil oder Theile.

		B 24.
A 12	zu	C 18.
E 6.		D 13.

Erklärung und Beweiß.

1. Satz. Miſſet A das B (als hier 2. mahl) juſt aus, ſo iſt [3. Def. 7.] A ein Theil der gröſſern Zahl B.

2. Satz. Sind A und C gegen einander compoſita, ſo wird ſelbige [2. 7.] ein allgemeines Maaß (E 6.) ausmeſſen. Und A [4. Def. 7.] etliche Theile von der gröſſern Zahl C seyn, (nehmlich hier $\frac{12}{18}$. oder $\frac{2}{3}$. id eſt zwey Dreytheile.

3. Satz.

3. Satz. Sind A und D unter ſich prim-Zahlen, ſo wird [1. 7.] doch wenigſt die Unitæt beyde ausmeſſen, und [5. ax. 7.] die Anzahl der Unitæten anzeigen, wie viel Theile A gegen B halte, (daß iſt hier $\frac{12}{13}$. oder zwölff Dreyzehen-Theile.

Die 5. Propoſition.

Wenn eine Zahl A eben derſelbe Theil gegen die Zahl B iſt, als eine andere Zahl C ein Theil einer andern Zahl D. So wird auch A und C zuſammen, eben derſelbe Theil gegen B und D zuſammen ſeyn, als die eine Zahl A zu der andern Zahl B.

A 8 C 2 (A + C 10.
B 24 D 6 (B + D 30.

Beweiß.

Weil A gegen B, wie C gegen D, alſo auch A gegen C, [16. 5.] wie B gegen D. So wird auch [1. 5.] A + C gegen B + D ſich verhalten, wie A gegen B oder C gegen D. Folglich A + C eben derjenige Theil gegen B + D, als A gegen B ſeyn. So zu beweiſen war.

Die 6. Propoſition.

Wenn eine Zahl A gegen der Zahl B eben dergleichen Theile, als die Zahl C gegen

gegen der Zahl D ſeyn wird. So ſoll auch A und C zuſammen, gegen B und D zuſammen, eben derſelbe Theil oder Theile ſeyn, als A gegen B.

Beweiß.

A 6		C 8.
B 9		D 12.
15	zu	20.

Diß iſt voriger 5. Propoſ. gantz conform. Und nur was dort von einem Theil zu verſtehen/ hier dafür etliche Theile müſſen verſtanden werden. Auch dahero einerley Beweiß.

Die 7. Propoſition.

Wenn eine Zahl A, eben derſelbe Theil, der Zahl B, als der abziehende Theil C von A, dem abziehenden Theil D von B.

So wird auch der Uberſchuß E, gegen dem Uberſchuß F, eben derſelbe Theil als das gantze A, gegen dem gantzen B ſeyn.

Beweiß.

A 6	B 12.
C 2	D 4.
E 4	F 8.

Weil A gegen B, wie C gegen D, ſo wird auch A gegen C, [16. 5.] wie B gegen D ſeyn. Folglich auch E gegen F, [3. ax. 1.] wie A gegen B.

Die

Die 8. Propoſition.

Wenn eine Zahl A eben dieſelbe Theile der Zahl B, als der Abzug C, dem Abzug D. So wird auch der Uberſchuß E gegen dem Uberſchuß F, eben dieſelbe Theile halten, als A gegen B.

Beweiß.

A 8.	B 12.
C 2.	D 3.
E 6.	F 9.

Iſt ebenfalls mit vorhergehender Propoſition einerley, nur was dort von einem gleichen Theil, hier von gleichen Theilen, zu verſtehen.

Die 9. Propoſition.

Wenn eine Zahl A, ein Theil der Zahl B iſt, als der Theil der Zahl C der Zahl D. So wird auch verwechſelt, A gegen C, eben derſelbe Theil oder Theile ſeyn, als wie die andere B gegen der vierten D.

A 8. B 24. C 4. D 12.

Beweiß.

Weil A gegen B, wie C gegen D, ſo wird auch [16. 5.] A gegen C, wie B gegen D ſich verhalten, oder einem gleichen Theil oder Theile haben.

Die 10. Propoſition.

Wenn eine Zahl A eben dieſelbe Theile gegen B, als C gegen D. So wird auch verwechſelt, die erſte A gegen der dritten C eben dergleichen Theile haben, als die andere B gegen der vierten D.

A 6. B 9. C 8. D 12.

Beweiß.

Iſt eben vorhergehende Propoſition, nur was dort von einem Theil geſagt/ hier von Theilen wiederholet worden.

Die 11. Propoſition.

Wenn eine Zahl A iſt zu der Zahl B, wie der abziehende Theil C zu dem abziehenden Theil D. So wird auch die übrige Zahl E zu der übrigen Zahl F seyn, als die gantze Zahl A zu der gantzen Zahl B.

Beweiß.

A 12.	B 18.
C 4.	D 6.
E 8.	F 12.

Weil A gegen B, wie C gegen D, ſo iſt diß [3.ax.1.] an ſich ſelbſt klar, und bedarff keines fernern Beweiſes.

Die

Die 12. Propoſition.

Wenn einige gleich verhaltende Zahlen ſeyn, nehmlich: wie A zu B, alſo C zu D, auch E zu F &c. So wird, wie A zu B, alſo auch die Summa der vorhergehenden A, C, E, zu der Summa der nachfolgenden B, D, F, ſeyn.

Beweiß.

A 4.	B 6.
C 6.	D 9.
E 2.	F 3.
12.	18.

Iſt der 1. Propoſition des 5. Buchs gantz gleich, und dahero daſelbſt allbereit bewieſen.

Die 13. Propoſition.

Wenn 4. Zahlen gleich verhaltend oder proportionirt, nehmlich: wie A zu B, alſo C zu D. Die werden auch verwechſelt proportionirt ſeyn. Daß iſt A zu C, wie B zu D.

A 4. B 6. C 8. D 12.

Beweiß.

Es iſt dieſes die 16. Prop. des 5ten Buchs, und was dort in Gröſſen oder Quantitäten vorgeſtellet, hier in Zahlen wiederholet worden.

Die 14. Propoſition.

Wenn etliche Zahlen A, B, C, ſeynd, und andere in gleicher Anzahl D, E, F, ie 2 und 2 in gleicher Proportion genommen werden, daß iſt: Wie A zu B, alſo D zu E, und wie B zu C, alſo E zu F. So wird geſchehen, daß A zu C, wie D zu F.

Beweiß.

A 18.	D 12.
B 12.	E 8.
C 6.	F 4.

Weil A zu B, wie D zu E, ſo wird auch verwechſelt ſeyn, [13.7.] A zu D, wie B zu E, item, wie C zu F. Und dahero eben wieder durch die Verwechſelung, A zu C, wie D zu F.

Die 15. Propoſition.

Wenn die Unität A eine Zahl B alſo: gleich wie eine andere oder dritte Zahl C, eine andere oder vierte Zahl D miſſet. So wird auch verwechſelt, die Unität A, die dritte Zahl C meſſen, gleich wie die andere B, die vierte D miſſet.

A 1. B 3. C 2. D 6.

Beweiß.

Wegen dergleichen Meßung, wird ſeyn A gegen B, wie C gegen D. Dahero [13.7.] A zu C, wie

C, wie B zu D. Weßhalben auch A die Unität C meſſen wird, gleichwie die andere Zahl B die vierte D.

Die 16. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B, wechſelsweiſe mit einander multipliciret werden. So werden die hervorkommende Producta C und D gleich ſeyn.

Beweiß.

A 5. B 4.
B 4. A 5.
C 20. = D 20
E 1

Dis iſt zwar [9. ax. 7.] an ſich ſelbſt klar. Jedoch ſey die Unität E geſtelt. Läſſet man nun einer ſeits gelten, daß die Unität in A 5 mal enthalten, und mit B 4 mal multipliciret wird, ſo kommen hervor 20 Unitäten. Item anderſeits, iſt die Unität in B 4. mal enthalten, und wird mit A 5 mal multiplicirt, als kommen wiederum D 20 Unitäten, gleich vorigen C 20 Unitäten hervor. So zubeweiſen war.

Die 17. Propoſition.

Wenn eine Zahl A, zwey andere B und C multiplicirt. So werden die herauskommende Producta D und E, eben die Verhältnüß, als B gegen C haben.

B 4.	C 5.
A 3.	A 3.
D 12.	E 15.

Beweiß.

In Betracht, dergleichen Multiplicirung, wird [6. ax. 1] D zu E ſeyn, wie B zu C. Oder aber, ſetze B und C, iedes 3 mal unter einander, und addire zuſammen, ſo wird ſolches auch [1.5.] bewieſen ſeyn.

Die 18. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B nach gefallen eine andere Zahl C multipliciren. So werden die herauskommenden Producta D und E in gleicher Verhåltnůs mit A und B ſtehen.

Beweiß.

A 4.	B 6.
C 5.	C 5.
D 20.	E 30

Dis iſt vice verſa vorhergeh. 17. Prop. gantz conform.

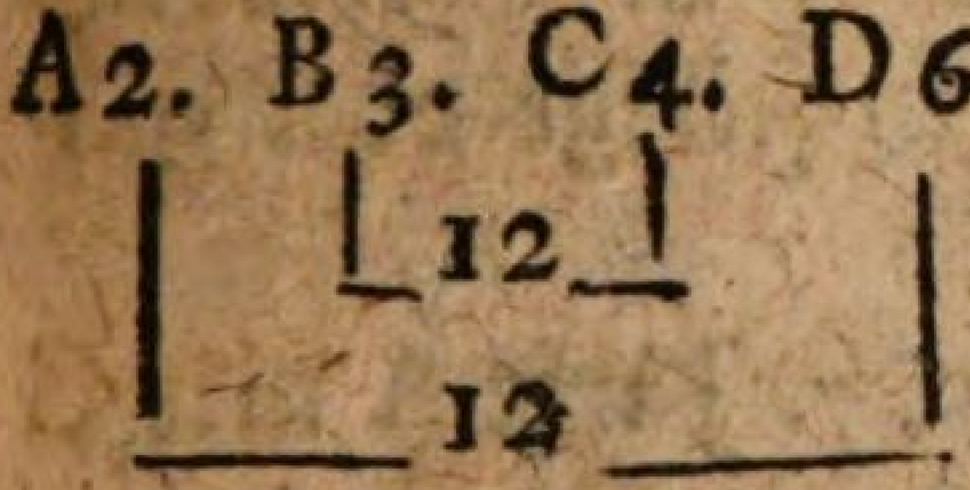
Die 19. Propoſition.

Wenn 4. Zahlen, als A zu B, wie C zu D werden proportionirt ſeyn. So wird das Product aus Multiplicirung der Erſten A mit der letzten oder Vierten D, gleich ſeyn, dem Product der Andern B mit der Dritten C. Und da bey 4 Zahlen, das Product der Erſten mit der

Vier=

Vierten, gleich dem Product der Andern mit der Dritten. So werden ſolche 4 Zahlen gleich verhaltend ſeyn.

Beweiß.



Weil [17.7.] A mit C, gegen A mit D, wie C gegen D. item, A zu B, [18.7] wie A mit C zu B mit C. Folgt! [9.5.] das A mit D = B mit C.

Nota, dieſe 19. Propoſition iſt wiederum ein vollgültiger Beweiß der Arithmetiſchen Regula Detri.

Die 20. Propoſition.

Wenn 3. Zahlen A, B, C, in continuirlicher proportion ſtehen, ſo wird das Product, von der Erſten A und der letzten C gleich ſeyn, der Quadrat-Zahl der andern oder mittlern B. Und ſo das Product einer Erſten und Dritten Zahl gleich, der Quadrat Zahl der Andern, ſo werden ſolche 3 Zahlen in continuirlicher Proportion ſtehen.

Beweiß.

A 4. B 6. C 9.
|___36___|

Man ſtelle ſtatt 3 Zahlen in eben dieſer Proportion 4 Zahlen, nemlich: A 4. B 6. D 6. C 9. welche dann mit denen 3 Erſtern eben ſelbige oder gleiche Verhältnüs haben.

Dieſemnach wird ſeyn [19. 7.] wie A mit C 36. alſo B mit D 36. daß iſt B mit B.

Die 21. Propoſition.

Die kleinſte Zahlen A und B, meſſen alle diejenigen (gröſſern) Zahlen C und D, ſo mit A und B in gleicher Proportion ſtehen, nemlich: Die gröſſere A alle gröſſere C, und die kleinere B, alle kleinere D.

Beweiß.

A 5. B 3.
C 10. D 6.

Weil A und B die kleinſten Zahlen, ihrer folgenden Proportionen, ſo ſeynd ſelbige [wie aus folgender 23. Propoſ. des mehrern erhellen wird] unter ſich Prim-Zahlen. Dahero [17. 7.] keine gleich-proportionirte mit A und B folgende Zahlen, anders, als durch A und B eigner Multiplicirung entſtehen können. Dahero dergleichen entſtehende proportionirte Zahlen, auch vice verſa von A und B wieder können gemeſſen werden.

Die 22. Propoſition.

Wenn 3 Zahlen A, B, C, und noch 3. andere D, E, F, in verruckter Ordnung alſo genommen werden. Daß A gegen B, wie E gegen F. Und B gegen C, wie D gegen E. So wird ſich A gegen C, wie D gegen F verhalten.

Beweiß.

A	6	D	12.
B	4	E	9.
C	3	F	6.

Dis iſt eine Wiederholung der 21 und 23ſten Prop. des 5ten Buchs, und ſelbigen gantz conform, alſo daſelbſt gnüglich bewieſen.

Die 23. Propoſition.

Die beyden Zahlen A und B, ſo unter ſich Prim-Zahlen, ſeynd die kleinſten Zahlen dererjenigen, ſo mit ſolchen Zahlen A gegen B, gleiche Proportion haben.

A 4. B 3.

Beweiß.

Weil A und B Prim-Zahlen ſeynd, ſo iſt deren algemein gröſtes Maaß [1.7] die Unität. Weiln nun keine kleinere gantze Zahl, als die Unität verhanden. So folgt! daß weil A und B, wenigſt mit 2. 3. 4. &c. müſten multiplicirt werden, alle daraus entſtehende folgende Zahlen

zwar [18. 7.] mit A und B proportionirt, aber auch zugleich gröſſer als A und B ſeyn werden.

Die 24. Propoſition.

Einer jeglichen Proportion letzte oder kleinſte Zahlen A und B, ſeynd unter ſich Prim Zahlen.

Beweiß.

A 9. B 5.

Iſt durch vorhergehende 23. Prop. gantz klar und wahrhafft.

Die 25. Propoſition.

Wenn zwey Zahlen A und B Prim-Zahlen gegen einander ſeynd, und eine davon, als hier A, wird von einer andern Zahl C gemeſſen. So wird C zu der andern B, eine Prim-Zahl ſeyn.

A 9. B 2.
C 3. D-

Beweiß.

Man laſſe ſeyn, daß B gegen C nicht Prim-Zahlen, ſondern ein algemein Maaß D verhanden. Dieſemnach würde D die C, und [11. 7.] D auch A meſſen. Da nun D auch B meſſen ſoll, und folglich beyde A und B, ſo könten [14. def. 7.] A und B nicht Prim-Zahlen, unter ſich ſeyn, welches alſo wieder die Propoſition und Warheit ſtreitet. Dannenhero können A und B kein ander algemeines Maaß, als die Unität haben, ſeynd demnach gegen

gen einander Prim-Zahlen. So zubeweiſen war

Die 26. Propoſition.

Wenn zwey Zahlen A und B, gegen eine andere Zahl C, Prim-Zahlen ſeynd. Das Product derer A mit B multiplicirten Zahl D, wird gegen C, auch eine Prim Zahl ſeyn.

1. Satz. A 7. B 5. C 11.
D 35.

2. Satz. A 12. B 5. C 11
D 60.

3. Satz. A 7. B 5. C 24.
D 35.

Dreyerley Caſus weren hier zubetrachten.

1. Satz. Wenn A, B und C, iede beſondern eine Prim-Zahl. So folgt! daß da C [1. 7.] anderſt nicht als mit der Unität zumeſſen, ſelbige zu allen andern Zahlen, und dahero auch zum Product D eine Prim-Zahl ſeyn müſſe.

2. Satz. Were eine von beyden A und B (als hier A 12.) ein Numerus compoſitus. C aber wiederum eine Prim-Zahl. So könte C nochmaln anders nicht als [1. 7.] mit der Unität gemeſſen werden, und folglich zum Product D eine Prim-Zahl ſeyn.

3. Satz. Wenn beyde A und B Prim-Zahlen, C aber ein Numerus compoſitus were. So ſeynd [21. und 23. 7.] A und B die kleinſten in ſolcher Verhältnüs, und bringt [10. def. 7.] das Product

duct eine ungerade Zahl D hervor. Welche mit A und B zu einem algemeinen Maaß [1. 7.] keine andere Zahl als A und B ſelbſt, oder aber die Unität haben können.

Weiln dahero A und B Prim-Zahlen gegen C. ſo iſt auch zu A. B und dem Product D, kein ander algemeines Maaß, als A und B ſelbſt, und die Unität verhanden. Woraus folget: daß auch C gegen D eine Prim-Zahl ſeyn müße. So zubeweiſen war.

Die 27. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B unter ſich Prim-Zahlen ſeyn. Die Quadrat-Zahl D der einen A, wird gegen die andere Zahl B, eine Prim-Zahl ſeyn.

A4. B3. C4. D16.

Beweiß.

Nimm C = A, ſo werden beyde A und C gegen B, Prim-Zahlen ſeyn. Multiplicire nun beyde A und C in einander, komt D. Dahero [26. 7.] A mit C (das iſt D) gegen B eine Prim-Zahl.

Die 28. Propoſition.

Wenn 2. Zahlen A und B, gegen 2. andere Zahlen C und D, Prim-Zahlen ſeyn. So werden auch deren Producta

(das

(das iſt, A mit B, und C mit D. mult.) gegen einander Prim-Zahlen ſeyn.

Beweiß.

A 5	C 4	Weil A und B gegen C Prim-Zahlen ſeyn, ſo wird auch [26.7] A mit B mult. gegen C eine Prim-Zahl ſeyn.
B 3	D 2	
15	8	

Auf dergleichen Art, iſt auch A mit B multipl. gegen D, eine Prim-Zahl.

Da nun C und D iede beſondern gegen A mit B mult. Prim-Zahlen. So wird wiederum [26.7.] das Product C mit D, gegen A mit B, eine Prim-Zahl ſeyn. So zubeweiſen war.

Die 29. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B gegen einander Prim-Zahlen ſeynd, und iede wird in ſich ſelbſt multiplicirt oder quadrirt. So werden die entſtehende Quadrat-Zahlen C und D, auch gegen einander Prim-Zahlen ſeyn. Und wenn dieſe Quadrat-Zahlen ferner mit A und B. (das iſt A und B cubice) multipliciret werden, da heraus kommt E und F, ſo werden dieſe E und F, ebenfals gegen einander Prim-Zahlen ſeyn, und unendlich alſo fort weiter.

Beweiß.

A	5	B	4
C	25	D	16
E	125	F	64

Weil A gegen B eine Prim-Zahl, ſo wird auch [27. 7.] C zu B, ingleichen verwechſelt D zu C [28. 7.] eine Prim-Zahl ſeyn. Ebenermaſſen, wie A und C, gegen B und D Prim-Zahlen ſeyn, ſo werden auch [16. 5.] E und F gegen einander Prim-Zahlen ſeyn/ und alſo unendlich fort.

Die 30. Propoſition.

Wenn 2. Zahlen A und B Prim-Zahlen gegen einander, ſo wird auch deren Summa C, zu ieder beſondern, eine Prim-Zahl ſeyn. Und wenn die Summa C, zweyer Zahlen A und B, gegen iegliche Zahl A und B beſonders, eine Prim-Zahl, ſo werden auch ſolche 2 Zahlen A und B, gegen einander Prim-Zahlen ſeyn.

Beweiß.

A	5
B	4
C	9
D	—

Weren A und B nicht gegen einander Prim-Zahlen/ ſo müſte ein allgemein Maaß D verhanden ſeyn. Welches dann [12 ax. 7.] A, B und C meßen würde/ wannenhero A gegen B keine Prim-Zahl ſeyn könte/ ſo aber wieder die Propoſition ſtreitet. Darum ſeynd A, B und C unter ſich oder gegen einander, Prim-Zahlen.

Die

Die 31. Propoſition.

Eine iede Prim-Zahl A, iſt gegen einer andern Zahl B, die ſie nicht mißet, eine Prim-Zahl.

A 7. B 8.

Beweiß.

Wenn zu A und B ein allgemeines Maaß zu finden, ſo würden ſelbige [1. 7.] keine Prim-Zahlen gegen einander ſeyn. Darum, weil kein allgemein Maaß verhanden oder dazu zufinden, ſo ſeynd ſie gegen einander Prim-Zahlen.

Die 32. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B in einander multipliciret werden, und etwa eine andere Prim-Zahl D, das Product C miſſet, ſo wird auch ſolche Prim-Zahl D. eine der beyden erſten Zahlen, entweder A oder B meßen.

Beweiß.

A 5.
B 6. D 3.
C 30. E 10.

Man ſetze, daß die Zahl D die Zahl A nicht meße, ſo wird ſeyn [9 ax. 7.] C durch D ausgemeßen (das iſt C mit D abdividirt) = E. Dahero A mit B = D mit E mult. das iſt [14. 6.] D zu A wie B zu E. Weiln nun [31. 7.] D gegen A eine Prim-Zahl. Dahero ſeynd

[23.

[23.7.] D und A die kleinſten in ſolcher Proportion, und mißet folglich [21.7.] D ſo offt B, als A die E, nehmlich D mißet die B. So zu beweiſen war.

Die 33. Propoſition.

Eine iede zuſammen geſetzte (multiplicirte) Zahl A. (numerus Compoſ.) mißet etwa eine Prim-Zahl C.

A 42. C 3. B 6.

Beweiß.

Man laſſe [13 def. 7.] A etliche Zahlen meſſen/ unter dieſen ſey B die kleinſte, die wird dann eine Prim-Zahl ſeyn. Denn ſo es nicht eine Prim-Zahl/ſondern ein numerus compoſitus, gleich als etwa B 6 were, ſo würde auch dieſe B eine andere Zahl (hier 2) meßen, nehmlich: ſo lang und viel bis endlich auf C die kleinſte. Welche C dann anderſt nicht, alß durch die Unitæt kan gemeßen werden. Dahero iſt [11 Def. 7.] C eine Prim-Zahl.

Die 34. Propoſition.

Eine iede Zahl A, iſt entweder eine Prim-Zahl, oder wird von einer Prim-Zahl gemeßen.

Be-

Beweiß.

A 15. Iſt A eine Prim-Zahl, ſo hat es ſeine Richtigkeit. Iſt ſelbige aber keine Prim-Zahl, ſo muß ſolche [13 Def. 7.] ein numerus compoſitus ſeyn, und [33. 7.] von einer Prim-Zahl, gleich als hier durch 5 oder 3 können gemeſſen werden.

Die 35. Propoſition.

Zu ieden gegebenen Zahlen *A*, B, C, andere E, F, G, als die kleinſten in Verhältnüs derer A. B. C. zufinden.

Operatio.

A 12. B 18. C 24.
E 2. F 3. G 4.
H 6.

Solten A, B, C, Prim-Zahlen gegen einander ſeyn, ſo weren ſie albereit [23. 7.] die kleinſten von dergleichen Verhältnüs.

Da es aber zuſammen geſetzte Zahlen ſeynd, ſo ſuche [3. 7.] ihr algemeines Maaß H, durch dieſes die A, B, C gemeſſen (id eſt dividirt) ſo werden die herauskommenden E F G, die begehrten kleinſten in der Proportion ABC ſeyn.

Beweiß.

Wenn E F G nicht die kleinſten, ſondern andere noch kleinere ſeyn könten, ſo were [3. 7.] H zu A, B, C, nicht das algemeine gröſte Maaß, als müſte die noch kleinere Verhältnüs auch

[21.7.] die E, F und G meſſen, ſo aber [3.7.] wieder die Warheit ſtreitet. Dahero ſeynd E, F und G (in der Verhältnüs A, B, C.) die kleinſten.

Die 36. Propoſition.

Zu zweyen gegebenen Zahlen A und B die kleinſte Zahl C zufinden, welche von A und B zu gleich kan gemeſſen werden.

1. Satz. A 5. B 3. C 15.

2. Satz. A 8. B 6. D 4. E 3. F 2. G 24.

Operatio.

Zweyerley fält hier vor, alß:

1. Satz. Wenn A und B Prim-Zahlen gegen einander, ſo wird A 5. mit B 3. multiplicirt C 15. die begehrte Zahl seyn.

2. Satz. Seynd aber A und B, gegeneinander Compoſita, ſo ſuche [35.7.] D und E, die kleinſten, in der Verhältnüs A zu B. durch [3.7.] das algemeine gröſte Maaß F. 2. Multiplicire ferner D, E und F. in einander, ſo wird das Product G. die begehrte Zahl seyn.

Beweiß.

1. Satz. A mit B iſt [16.7.] = B mit A = C da nun A und B die kleinſten in der Proportion, und gegen einander Prim-Zahlen. So iſt auch [7. ax. 7.] C die geſuchte kleinſte Zahl.

2. Satz. Wenn A und B nicht Prim-Zahlen, ſondern durch F abmeſſende (oder dividirende) die Prim-Zahlen D und E, als die kleinſten in der Pro-

Proportion A und B heraus bringen. So iſt [7. ax. 7.] die Zahl A mit B durch F abmeſſende, (oder dividirend) die kleinſte, und = der Zahl D mit E mit F multiplicirend. Dahero dann C mit D mit F, die begehrte Zahl G. So zubeweiſen war.

Die 37. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B, irgend eine andere Zahl C meſſen. So wird die kleinſte Zahl D. als welche von A und B gemeſſen wird, auch die Zahl C meſſen.

A 6. B 4. C 48. D 12.

Beweiß.

Iſt D die kleinſte Zahl, ſo von A und B gemeſſen wird, ſo kan [36. 7.] C nicht kleiner als D, ſondern muß [14. 5.] entweder gleich, oder gröſſer ſeyn. Dahero iſt D die kleinſte Zahl.

Die 38. Propoſition.

Zu 3 gegebenen Zahlen A, B, C, die kleinſte Zahl H zufinden, ſo von A, B und C könne gemeſſen werden.

A 6. B 10. C 8. E 3. F 5. G 4.
D 2. H 120.

Operatio.

Seynd A, B und C unter ſich Prim-Zahlen, ſo werden ſelbige [36. 7.] alle 3 in einander multi-

plicirt, dann iſt die Arbeit ſchon geſchehen. Seynd A, B, C, aber zuſammen geſetzte Zahlen, ſo ſuche dazu [3. 7.] das gröſte algemeine Maaß D, und kleinſte Proportion E, F, G. Multiplicire dann E, F, G und D in einander, dis wird hervor bringen, die begehrte kleinſte Zahl H, ſo von A, B und C kan gemeſſen werden.

Beweiß.

Gleich wie die Operation vorhergehender 36. Prop. gantz conform, alſo iſt auch der Beweiß mit ſelbiger einerley, und dahero, was dort von 2 Zahlen, hier von 3 und auch mehrern zuverſtehen.

Die 39. Propoſition.

Wenn B die Zahl A miſſet, ſo hat die Zahl A ein gleich Theil C, deſſen Benennung (?) nach der meſſenden Zahl B geſchiehet.

A 15. B 5. C 3.

Beweiß.

B miſſet A ſo offt als [8. ax. 7.] Unitäten in C befindlich. Nachdem nun B und C die A meſſen, ſo ſollen verwechſelt in B ſo viel Unitäten enthalten ſeyn, als ſo offt C die A miſſet. Dahero, wie offt der Theil B [8. ax. 7.] in A begriffen, nach Anzahl der Unitäten in C muß genennet werden, alſo verwechſelt wird, ſo offt der Theil C in A begriffen, nach B benennet.

Die

Die 40. Propoſition.

Wenn eine Zahl *A* einig gleich Theil B hat, ſo miſſet dieſe Zahl *A* eine Zahl C, deren gleiche Theil die Benennung B hat.

A 12. B 4. C 3.

Erklärung.

C miſſet A 4 mal, oder iſt $\frac{1}{4}$ aus A, nach der Benennung 4 von B.

Beweiß.

Iſt vorhergehender 39 Prop. gleich, und deren Warheit leicht zu verſtehen.

Die 41. Propoſition.

Der gegebenen Theile *A*, B, und C, kleinſte Zahl D zufinden.

A $\frac{1}{3}$. B $\frac{1}{4}$. C $\frac{1}{5}$. D 60.

Operatio.

Nimm der Theile Benennung 3. 4. 5. und ſuche [38. 7.] hierzu die kleinſte Zahl D, ſo iſt ſolches geſchehen.

Beweiß.

Iſt vorhergehender 38. Prop. gleich.

Des ſiebenden Buchs Ende.

Das Achte Buch EUCLIDIS.

Die 1. Propoſition.

Wenn bey einigen in continuirender Proportion befindlichen Zahlen A, B, C, D, die Erſte A und letzte D Prim-Zahlen gegen einander, ſo werden dieſe Zahlen die kleinſten in ſolcher Verhältnüs ſeyn.

A 8. B 12. C 18. D 27.

Beweiß.

Wenn dieſe 4 Zahlen nicht die kleinſten, ſo könten andere 4 kleinere Zahlen [17. def. 5.] in gleicher Proportion genommen werden. Da aber A und D, gegen einander Prim-Zahlen, und [23. 7.] die kleinſten in ſolcher Verhältnüs. Als iſt nicht möglich, daß A und D kleiner, wohl aber [21. 7.] gröſſer mögen gefunden oder genommen werden.

Nota, Und dieſes findet dann auch bey mehrern Zahlen ſtatt. Zum Exempel bey folgenden

7 Zahlen A 64. B 96. C 144. D 216. E 324. F 486. G 729. und alſo bey unendlichen mehr.

Die 2. Propoſition.

Die kleinſten continuirlich proportionirte Zahlen, in verlangter Anzahl, nach der gegebenen Proportion A und B zufinden.

I.

A 3. B 4.

C 9. D 12. E 16.

F 27. G 36. H 48. I 64.

Operatio.

1 Satz. Quadrire A, komt C 9. Multiplicire A mit B, komt D 12. Quadrire B, komt E 16. Dieſem nach werden in 3en Zahlen C, D, E, die kleinſten in der Verhältnüs A zu B ſeyn.

Beweiß.

Es iſt [17. 7] A mit A, gegen A mit B, wie A mit B gegen B mit B. Jngleichen [29. 7.] C und E Prim-Zahlen. Dahero werden C, D, E, [1. 8.] die kleinſten in ſolcher Verhältnüs ſeyn. So zu beweiſen war.

Operatio.

2 Satz. Multiplicire C, D und E mit A. So komt F 27. G 36. H 48. Ferner E mit B kommt I 64. Dieſem nach werden in vier Zahlen, F, G, H, I die kleinſten in der Verhältnüs A zu B ſeyn.

Beweiß.

Die 4 Zahlen F, G, H, I, ſtehen mit A, B, und C, D, E, [17. 7.] in gleicher Verhältnüs. Es ſeynd auch [31. 7.] F und I Prim-Zahlen. Und dahero [1. 8.] F, G, H, I, die kleinſten 4 Zahlen, in der Verhältnis A zu B.

Anhang.

1 Alſo iſt die Unität der Urſprung aller auffſteigenden proportionirten Zahlen.

2 Die Erſte Reihe A und B ſeynd Zahlen der arithmetiſchen Progreſſion.

3. Die Zweyte Reihe C, D, E, ſeynd Quadrat- und derer Flächen Zahlen, und eine Geometriſche Progreſſion.

4. Die Dritte Reihe F, G, H, I, ſeynd Cubic- und Cörperliche Zahlen, alſo eine Cubiſche Progreſſion, &c.

Die 3. Propoſition.

Wenn einige Zahlen A, B, C, D, in continuirlicher Proportion die kleinſte Verhältnüs haben. So werden deren extrema oder die Erſte und letzte Zahl, gegen einander prim-Zahlen ſeyn.

A 27. B 18. C 12. D 8.

Beweiß.

Seynd A, B, C, D, die kleinſten in ſolcher Verhältnüs. So ſeynd die Erſte und Letzte Zahl A und

und D [1.8.] gegen einander, oder unter ſich Prim-Zahlen.

Die 4. Propoſition.

Wenn einige Verhältnůs A zu B, und C zu D, in denen kleinſten Zahlen gegeben werden. Dieſe Verhältnůs in geringerer oder wenigern Anzahl, und kleinſten Zahlen, der gegebenen Verhältnůs zufinden.

A 5. B 4. C 3. D 2. F 15. E 12. G 8.

Operatio.

Suche [6.7] die kleinſte Zahl zu B und C, die iſt E. Mache A zu F, [12.6] wie B zu E, und D zu G, wie C zu E. Dieſemnach wird F, E, G, in geringerer Anzahl, und kleinſten Zahlen, der begehrten Verhältnůs ſeyn.

Beweiß.

Daß dieſe Verhältnůs F, E, G, in geringerer Anzahl der erſtern A, B, C, D, (nemlich ſtatt 4 dafür 3) iſt an ſich ſelbſt offenbar. Es iſt auch die Verhältnůs der erſtern oder A, B, C, D = gemachet worden. Und da F und G. [1.7.] Prim-Zahlen gegen einander. So werden [1. 8] F, E, G die kleinſten Zahlen der gegebenen Verhältnůs ſeyn.

Die 5. Propoſition.

Alle Flach-Zahlen *A* und B, haben eine

Verhältnüs gegen einander, gleich wie ihre zuſammen geſetzte (daß iſt, durch einander geführte oder multiplicirte) Seiten CD und EF.

Beweiß.

A 20. B 24. C 4. D 5. E 3. F 8.

Dis iſt gleich der 23. Prop. des 6ten Buchs, und alſo daſelbſt zur gnüge bewieſen.

Die 6. Propoſition.

Wenn etliche Zahlen *A*, B, C, D, &c. in continuirlicher Proportion ſtehen. Und die Erſte *A* miſſet die Andere B nicht. So wird auch keine die andere (auch bis zu der letzten) meſſen.

A 32. B 48. C 72. D 108. E 162. F 243.

Beweiß.

Weil A zu B eben die Proportion, wie die continuirenden. So folget! daß weil A die B nicht juſt ausmiſſet (das iſt, [4. 7.] A kein Theil von B iſt) auch keine Zahl die andere folgende, oder eine welche es ſey, eine andere wie ſie auch genommen werde, meſſen wird.

Die 7. Propoſition.

Wenn etliche Zahlen *A*, B, C, D, E, in continuirlicher Proportion, und die Erſte *A* miſ=

A miſſet die Letzte E. So wird die Erſte A auch die andere B meſſen.

A 2. B 6. C 18. D 54. E 162.

Beweiß.

Wenn A die B nicht meßen ſolte, ſo würde auch [6. 8.] A die E nicht meßen, welches wieder die Propoſition ſtreitet. Dahero mißet A nicht allein die B, ſonderu auch alle nachfolgende C und D bis E.

Die 8. Propoſition.

Wenn einige in continuirlicher Proportion ſtehende Zahlen A, B, C, D, ſeynd. So viel nun Mittel-Zahlen (nehmlich: zwiſchen der Erſten und Letzten Zahl) fallen, eben ſo viel Mittel Zahlen, werden auch zwiſchen andern eben alſo proportionirten und gleich vielen Zahlen fallen.

A 16. B 24. C 36. D 54. E 8. F 12. G 18. H 27.

Beweiß.

Angeſehen beyderſeits Zahlen, in gleicher und continuirlicher Proportion ſtehen. Und A gegen D. wie E gegen H. So wird auch [14. 5.] die Verhältnüs, die Anzahl der Quantitæten/ derer Mittel Zahlen und anders, einander gantz gleichförmig ſeyn.

Die

Die 9. Propoſition.

Wie viel Mittel Zahlen, zwiſchen zweyen Prim-Zahlen A und B fallen. Eben ſo viel Mittel Zahlen (oder Reihen) von dergleichen Proportion, fallen zwiſchen der Unitæt, und denen erſtern Prim-Zahlen (nemlich: wie C, D, E, alſo hier F, G, H.)

1. Unitæt.

F 2. I 3.

G 4. 6. K 9.

H 8. 12. 18. L 27.

A 16. C 24. D 36. E 54. B 81.

Beweiß.

Dis iſt aus der Zahlen Natur eine an ſich ſelbſt offenbare Sache, welches aus der Figur deutlich zu ſehen. Daß nicht allein 1. F, G, H, A, und 1. I, K, L, B, ſondern auch die Mittel Zahlen F, G, H, mit C, D, E, in gleicher Anzahl ſeynd.

Die 10. Propoſition.

So viel Mittel Zahlen, zwiſchen der Unitæt, und denen äuſſerſten zweyen Zahlen (A, und D) in einer continuirlichen proportion fallen (nemlich E, F, und G, H,) eben ſo viel Mittel Zahlen werden auch zwiſchen A und B (die ſeynd B und C.) fallen.

A 8.

A 8. B 12. C 18. D 27.
E 4. 6. G 9.
F 2. H 3.
1.

Beweiß.

Die Figur und vorhergehende 9. Prop. geben klärlich dar, daß dieſe Propoſition vice verſa eben jene ſey.

Die 11. Propoſition.

Zwiſchen zweyen Quadrat-Zahlen A und B iſt eine mittlere gleich-verhaltende Zahl C, und das Quadrat A gegen dem Quadrat B, ſtehet in 2. mahliger (quadrirter) Verhältniß deren Seiten D zu E.

A 16. C 20. B 25.
D 4. E 5.

Beweiß.

A iſt zu C [17. 7.] wie D zu E, item auch C zu B, wie D zu E. Dahero A, C, B, [20. d. 7.] in continuirlicher Proportion; ingleichen ſtehet das Quadrat A gegen dem Quadrat B [19. und 20. 6.] in 2. mahlicher Verhältniß, derer Seiten D. gegen E.

Die 12. Propoſition.

Zwiſchen zweyen Cubic-Zahlen A und B, ſind

B, ſind 2. mittel proportionirte Zahlen verhanden, (nehmlich C und D,) und der Cubus A, hat gegen dem Cubo B, 3. mahliche (das iſt cubiſche) Verhältniß, der Seite A zu der Seite B.

A 64.	C 48.	D 36.	B 27.
E 4.			F 3.

Beweiß.

Es iſt [2. 8.] E zu F, wie A zu C, und C zu D, wie D zu B. Und hat der Cubus A gegen dem Cubo B [10. Def. 5.] 3. mahliche (das iſt cubiſche) Verhältniß, derer Seiten E zu F.

Die 13. Propoſition.

Wenn einige Zahlen A, B, C, in continuirlicher Proportion verhanden, und iede in ſich ſelbſt multiplicirt, andere D, E, F, formiren. So werden dieſe D, E, F, auch in continuirlicher Proportion ſtehen, (iedoch in anderer Verhältniß, als die erſtern.) Und nach dem man die D, E und F, iede ferner mit denen erſtern A, B und C multiplicirt. So werden hervor kommen andere G, H und I, ebenfalls wieder in continuirlicher Proportion, und alſo unendlich fort.

A 2. B 4. C 8.
D 4. 8. E 16. 32. F 64.
G 8. 16. 32. H 64. 128. 256. I 512.

Beweiß.

Erfülle dieſe Quantitæten mit denen Mittel-Zahlen [11. und 12. 8.] ſo werden ſolche auch in continuirlicher Verhältniß ſtehen. Und wegen der gemachten Gleichheit wird [11. 8.] D zu E, wie E zu F. item [12. 8.] G zu H, wie H zu I ſich verhalten. Und alſo auch mit andern continuirenden.

Die 14. Propoſition.

Wenn eine Quadrat-Zahl A, eine andere Quadrat-Zahl B, juſt ausmiſſet. So werden auch ihre Seiten C und D einander meſſen. Und alſo in Gegentheil, wenn zweyer Quadrata Seiten einander meſſen, ſo werden auch deren Quadrat-Zahlen einander meſſen.

A 9. E 18. B 36.
C 3. D 6.

Beweiß.

1. Satz. Multiplicire C mit D, ſo bringt ſolches [11. 8.] die mittlere gleich verhaltende E hervor. Dahero A, E, B, in continuirlicher Proportion ſtehen. Weiln nun A die B miſſet. So wird auch [7. 8.] A die E meſſen/ und wegen

gen gleicher Verhältniß [11. 8.] auch C die D. So zu beweiſen war.

2. Satz. Iſt durch vorhergehenden 1. Satz gnugſam bewieſen.

Die 15. Propoſition.

Wenn eine cubiſche Zahl A, eine andere cubiſche Zahl B miſſet, ſo werden auch deren Seiten C und D einander meſſen. Und alſo auch in Gegentheil, daß wenn die Seite des einen Cubi, miſſet die Seite eines andern Cubi. So werden auch deren Cubic-Zahlen einander meſſen.

A 8.	E 32.	F 128.	B 512.
C 2.			D 8.

Beweiß.

1. Satz. Erfülle A und B [12. 8.] durch E und F (nehmlich: das Quadrat von C, multiplicire mit D, kommt E. Jngleichen das Quadrat von D, multipl. mit C, kommt F.) So werden A, E, F, B, in continuirlicher Proportion ſtehen. Weiln nun A die B miſſet. So wird auch [7. 8.] A die E und F meſſen, und wegen gleicher Verhältniß [12. 8.] auch C die D. So zu beweiſen war.

2. Satz. Iſt durch vorhergehendes gnüglich erwieſen, denn wenn jenes nicht wahrhafft, könte vice verſa dieſes auch nicht wahrhafft ſeyn.

Die

Die 16. Propoſition.

Wenn eine Quadrat-Zahl A, eine andere Quadrat-Zahl B nicht miſſet. So werden auch deren Seiten E und F einander nicht meſſen.

Und alſo in Gegentheil, daß wenn derer Quadraten Seiten einander nicht meſſen, ſo werden auch ihre Quadrat-Zahlen einander nicht meſſen.

Beweiß.

A 9. B 25.
C 3. D 5.

1. Satz. Wolte man ſagen die Seiten C und D könten [14. 8.] dennoch einander meſſen. So müſten auch [14. 8.] die Quadrat-Zahlen A und B einander meſſen. Welches doch gegen die Propoſition ſtreitet.

2. Satz. Mit dieſen hat es eben vorhergehende Bewandniß/ und bedarff alſo keines a parten Beweiſes.

Die 17. Propoſition.

Wenn eine Cubic-Zahl A nicht miſſet eine andere Cubic-Zahl B. So werden auch deren Seiten C und D einander nicht meſſen. Und ſo zweyer Cubi Seiten einander nicht meſſen, werden auch deren Cubic-Zahlen, einander nicht meſſen.

Beweiß.

A 27. B 64. C 3. D 4.

Es iſt dieſes, das Gegentheil, oder vice verſa vorhergehende 15. Propoſition, und alſo in Anſehung dortigen Beweiſes hier richtig.

Die 18. Propoſition.

Zwiſchen zweyen gleich proportionirten Flach-Zahlen A und B, iſt eine mittlere gleich verhaltende zu finden. Und hat die Flach-Zahl A gegen der Flach-Zahl B doppelte (quadrirte) Verhältniß, als die Seite D, zu der gleich proportionirten Seite F hat.

A 8. C 12. B 18.
Seite D 4. und E 2. Seite F 6. und G 3.

Operatio und Beweiß.

Mache [11. 8.] wie D zu F, alſo A zu C. So werden A, C, B, in continuirlicher Verhältniß ſtehen, eben wie D zu F. Dahero [10. Def. 5.] A gegen B in doppelter (id eſt quadrirter) Verhältniß ſtehet, wie D gegen F, oder E gegen G. So zu beweiſen war.

Die 19. Propoſition.

Zwiſchen zweyen gleich proportionirten Corperlichen Zahlen A und B, finden ſich zwey mittlere gleich verhaltende

de E und F. Und die Cörperliche Zahl A, ſtehet gegen der Cörperlichen Zahl B, in 3. facher (id eſt cubiſcher) Verhältniß, als deren gleich proportionirte Seiten C gegen D.

A 48. E 72. F 108. B 162.
C 2. 6. 4. D 3. 9. 6.

Operatio und Beweiß.

Mache [12. 8.] wie C zu D, alſo A zu E, und E zu F. So werden A, E, F, B, in continuirlicher Verhältniß ſtehen, gleich als C gegen D. Und dahero wird A zu B [10. Def. 5. und 12. 8.] in 3. facher Verhältniß in Proportion C gegen D, ſtehen.

Die 20. Propoſition.

Wenn zwiſchen zwey Zahlen A und B, eine mittlere gleich verhaltende fället. So werden A und B, gleich flache Zahlen ſeyn.

A 27. C 36. B 48.
D 3 E 9. F 4. G 12.

Beweiß.

Wenn A eine Flach-Zahl ſeyn ſoll, ſo muß ſelbige [16. Def. 7.] ein Numerus Compoſitus ſeyn. Zertheile dahero ſelbige durch D und E, und mache, wie A zu C, alſo D zu F, und E zu G, ſo ſeynd hierdurch, derer Flach-Zahlen Seiten

bekandt. Weil dieſemnach [18. 8.] A gegen B doppelte Verhältniß, als iſt A zu C einfache Verhältniß derer Seiten, gleich wie hier D zu F, oder E zu G gemachet worden.

Nota, dieſer Beweiß kan ſonder der Zahlen Beyhülffe nicht füglich oder deutlich elaboriret werden, Urſach: Weil D gegen E und folglich F gegen G auch in anderer Proportion zu nehmen.

Zum Ex. A 27. C 36. B 48.
D $4\frac{1}{2}$. E 6. F 6. G 8.

Hier iſt ebenfalls D zu F, wie E zu G, und A zu C. item, D zu E, wie F zu G.

Wodurch dann der Propoſition ſammt dem Beweiß ein gleichmäßiges Genügen geſchiehet/ ob ſchon die Verhältniß derer Seiten, mit vorigen ziemlich differiret.

Die 21. Propoſition.

Wenn zwiſchen zweyen Zahlen A und B 2. mitlere gleichverhaltende C und D fallen. So werden A und B: Cörperliche Zahlen, und gleich proportionirte Seiten haben.

A 192. C 288. D 432. B 648.
E 4. F 6. G 8. H 6. I 9. K 12.

Operatio und Beweiß.

Weil A eine Cörperliche Zahl, ſo zertheile man ſelbige nach Gefallen in 3. Theile/ als erſtlich

ſich durch E und F, woraus die G entſpringet, und mache, wie A zu C, alſo E zu H, item, wie F zu I, alſo G zu K. So ſeynd hierdurch der Cörperlichen Zahl A ihre Seiten E F G, wie auch der Cörperlichen Zahl B ihre Seiten H I K bekandt, und ſtehen mit einander in gleicher proportion. Weil demnach [19. 8.] A gegen B 3fache (id eſt cubiſche) Verhältniß/ſo iſt A zu C die einfache Verhältniß/derer Seiten E zu H, gleich wie es hier alſo gemachet, und die übrigen Seiten gleich proportioniret genommen worden.

Nota. Das bey voriger Propoſition erinnerte, iſt hier ebenfalls alſo auch zu verſtehen: Indem die Cörperliche Zahlen A und B gleicher maßen in noch viel andere propoſitionirte Seiten zu zertheilen. Zum Exempel,

die Zahl A 192.	die Zahl B 648
in E 2. F 12. G 8	H 3. I 18. K 12
in E 12. F 4. G 4	H 18. I 6. K 6.

Und alſo noch andere Theilung mehr, wodurch der Propoſition und dem Beweiß gantz nichts abgehet.

Die 22. Propoſition.

Wenn 3 Zahlen A B C, in continuirlicher Proportion ſtehen. Und die Erſte davon A, iſt eine Quadrat-Zahl, ſo wird auch die Dritte C eine Quadrat Zahl ſeyn.

A 9. B 12. C 16.

Beweiß.

Nachdem zwiſchen A und C eine Mitlere proportionirte B fället: So ſeynd [20.8.] A und C gleiche Flach-Zahlen. Iſt nun A eine Quadrat-Zahl, ſo folgt [16.5. und Anh. 2. 8.] daß auch C eine Quadrat-Zahl ſeyn müſſe. So zubeweiſen war.

Die 23. Propoſition.

Wenn 4 Zahlen A, B, C, D, in continuirlicher Verhältnüs ſtehen, und die Erſte A iſt eine Cubic-Zahl. So wird auch die Vierte D eine Cubic-Zahl ſeyn.

A 8. B 12. C 18. D 27.

Beweiß.

A und D ſeynd [21. 8.] gleich proportionirte Cörperliche Zahlen. Dähero/ weil A eine Cubic-Zahl, ſo wird auch [16. 5. und Anh. 2. 8.] D eine Cubic-Zahl ſeyn.

Die 24. Propoſition.

Wenn zwey Zahlen A und B gegen einander, als eine Quadrat-Zahl C zu einer Quadrat-Zahl D, proportionirt ſeyn. Und die Erſte A iſt eine Quadrat-Zahl, ſo wird auch die Andere B, eine Quadrat-Zahl ſeyn.

A 9. F 12. B 16. C 36. E 48. D 64.

Be-

Beweiß.

Zwiſchen C und D [11. 8.] fållet eine Mitlere gleich verhaltende E. Alſo auch zwiſchen *A* und B [8. 8.] die F. Dahero [22. 8.] iſt das Quadrat C zum Quadrat D, wie das Quadrat *A* zum Quadrat B.

Die 25. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B, gegen einander proportionirt ſeyn, als eine Cubic-Zahl C, gegen einer Cubic-Zahl D. Und die Erſte *A* iſt eine Cubic-Zahl, ſo wird auch die andere D eine Cubic-Zahl ſeyn.

A 27. G 54. H 108. B 216. C 8. E 16 F 32. D 64.

Beweiß.

Zwiſchen C und D fallen [12. 8.] 2 mitlere gleich proportionirte E und F. Alſo auch zwiſchen A und B [8. 8.] die G und H. Wie dahero die Cubic-Zahl C gegen D. alſo iſt [23. 8.] die Cubic-Zahl A gegen der Cubic-Zahl B. So zu beweiſen war.

Die 26. Propoſition.

Gleichförmige Flach-Zahlen A und B, ſeynd gegen einander proportionirt, als wie eine Quadrat-Zahl C gegen der andern Quadrat-Zahl D.

Beweiß.

A 8. E 12. B 18.
C 16. F 24. D 36.

Zwiſchen A und B, [18. 8.] fället eine Mittlere gleichverhaltende E. Alſo auch [11. 8.] zwiſchen C und D, die F. Und weil A, E und B in gleicher Proportion mit C, F und D. So wird A zu B [14. 5.] wie C zu D seyn.

Die 27. Propoſition.

Gleich proportionirte Cörperliche Zahlen A und D, seynd gegen einander proportionirt, wie eine Cubic-Zahl E, zu einer Cubic Zahl H.

A 48. B 72. C 108. D 162. E 8. F 12. G 18. H 27.

Beweiß.

Zwiſchen E und H fallen [12. 8.] 2 mittlere gleich verhaltende F und G. Alſo auch [8. 8.] zwiſchen A und D, die B und C. Wie ſich dahero die Cubic-Zahl E zu der Cubic-Zahl H verhält, alſo wird [14. 5.] ſich auch die Cörperliche Zahl A gegen der Cörperlichen Zahl D verhalten.

Des Achten Buchs Ende.

Das Neunde Buch EUCLIDIS.

Die 1. Propoſition.

Wenn zwey gleichförmige Flach-Zahlen A und B, einander multipliciren. So wird das entſtehende Product C eine Quadrat Zahl ſeyn.

A 8. E 12. B 18. D 64. F 96. C 144.

Beweiß.

Quadrire A. komt die Quadrat-Zahl D. Dann wird A zu B ſeyn [17. 7.] wie D zu C. Weil nun [18. 8.] zwiſchen A und B eine Mitlere gleichverhaltende E fället: So wird auch [8. 8.] zwiſchen D und C eine Mitlere gleich verhaltende F fallen. Und weil D eine Quadrat-Zahl, ſo wird auch [22. 8.] C eine Quadrat-Zahl ſeyn. Welches zu beweiſen war.

Die 2. Propoſition.

Wenn 2 Zahlen A und B einander multipliciren, und das entſtehende Product C eine Quadrat-Zahl hervor bringt So werden A und B gleich-proportionirte Flach-Zahlen ſeyn.

A 8. E 12. B 18. D 64. F 96. C 144.

Beweiß.

Es iſt eben vorhergehende Prop. in verwechſelten Vortrag nemlich:

Quadrire A, komt D eine Quadrat-Zahl. Nun iſt [17.7.] A zu B, wie D zu C. Und zwiſchen D und C fället [8.8.] eine Mitlere gleich verhaltende F. Auch alſo [18.8.] zwiſchen A und B, die mitlere gleich verhaltende E. Weiln nun D und C Quadrat-Zahlen, ſo werden [26.8.] A und B gleich-proportionirte Flach-Zahlen ſeyn. So zubeweiſen war.

Die 3. Propoſition.

Wenn eine Cubic-Zahl A, ſich ſelbſt multiplicirt, ſo wird das Product B auch eine Cubic-Zahl ſeyn.

A 8. B 64. 1. C 2. D 4. A 8.
A 8. E 16. F 32. B 64.

Beweiß.

Man nehme die Cubic-Zahl oder Unität 1, und comparire ſolche mit der Cubic-Zahl A, ſo werden zwiſchen 1. und A 8. [12. 8.] zwey mitlere gleich verhaltende C und D fallen.

Da nun 1 zu A 8. wie A 8. zu B 64. Als werden zwiſchen A und B [8. 8.] eben ſo viel Mittel-Zahlen, als zwiſchen 1 und A, nemlich E und F, fallen. Und derohalben, weil A eine Cubic-Zahl, wird

wird [23. 8.] B auch eine Cubic-Zahl ſeyn. So zubeweiſen war.

Anhang.

Durch die Algebra, iſt dis eine leichtverſtehende und klare Sache. Gleich wie zum Ex. pag. 27. bey der Multiplication zuſehen: Daß wenn C mit C multipliciret (id eſt ein Cubus quadriret) wird. Selbiges Zenſicubus oder Cubizenſus, das iſt abbrevirt ZC. oder CZ, alſo wieder eine Cubic-Zahl hervor bringet.

Nota, Es wird dieſem nach künfftig hin, beliebter Kürtze und Deutlichkeit halber, in dieſen 9ten und folgenden 10ten Buch, das meiſte, durch Hülffe der Algebra bewieſen werden. Dahero auch vorher befindliche Tabella pag 21. nochmaln recommendire, als worauf itzt beſchehene, und viele folgende Beweißthüme, dieſes 9ten Buchs gegründet ſeyn.

Solte etwa, iemand die Meinung hegen, daß denenjenigen, welche der Algebra nicht kundig, dabey zu kurtz geſchehe, und in Ermangelung anderen Beweiſſes, fernerhin wenig verſtehen würden. So dienet zur Antwort! daß albereit in der Vorrede zur gnüge erinnert worden, wie niemand ohne der Algebra nöthigen Erkänlnüs, in dieſen 9ten, beſonders aber in dem drauf folgenden 10ten Buch fortzukommen vermag.

Denn ſo man denen, die weder der Geometria, Stereometria noch Algebra kundig, von denen

Qua-

Quadrat-Cubic-Flach-und Cörperlichen Zahlen, dann ferner von denen Irrational Quantitäten, gleich noch ſo ein langes und breites herſchreiben und weitläufftig demonſtriren wolte, würde doch damit wenig auszurichten ſeyn, und ihnen dergleichen Sachen wohl gar unbegreifflich ſcheinen, welche hingegen von einem der Algebra kundigen nur als das algemeine A, B, C betrachtet werden.

Die 4. Propoſition.

Eine Cubic-Zahl A, mit einer andern Cubic-Zahl B multiplicirt, bringt wieder eine Cubic-Zahl C hervor.

A 8. B 27. C 216.

Beweiß.

Ein Cubus in ſich ſelbſt, das iſt C, mit C, mult. bringt [3. 9.] CZ oder ZC. und alſo eine Cubic-Zahl hervor.

Die 5. Propoſition.

Wenn eine Cubic-Zahl A, eine andere Zahl B multiplicirt, und eine Cubic-Zahl C hervor bringt. So wird B auch eine Cubic-Zahl ſeyn.

A 8. B 64. C 512.

Beweiß.

Es iſt dieſes vice verſa vorhergehende 4 Propoſition, und hat dieſem nach hierdurch ſeine Richtigkeit.

Die

Die 6. Propoſition.

Wenn eine Zahl A ſich ſelbſt multiplicirt, eine Cubic-Zahl B hervor bringt. So wird A auch eine Cubic-Zahl ſeyn.

A 8. B 64.

Beweiß.

Dis iſt vice verſa vorhergehende 3. Prop. und alſo eine klare erwieſene Sache.

Die 7. Propoſition.

Wenn ein Numerus Compoſitus A, eine andere Zahl B multiplicirt. So wird das Product C, eine Cörperliche Zahl ſeyn.

A 12. mit B 5. bringt C 30.

Beweiß.

Die Zahl A iſt [16. def. 7.] eine Flach-Zahl von 2en Seiten begriffen, dahero dis mit der Dritten Zahl oder Seite B multiplicirt, wird [17. def. 7.] eine 3 ſeitige oder Cörperliche Zahl hervorbringen.

Anhang.

Dis würde auch geſchehen, wenn A eine Cörperliche Zahl were, und ebenfals mit B multiplicirt, wieder eine Cörperliche Zahl hervor kommen. Denn iede Cörperliche Zahl, kan auch eine Flach-Zahl ſeyn.

Die

Die 8. Propoſition.

Wenn von der Unität an, einige Zahlen 1. A, B, C, D, E, F, G, H &c. in continuirlicher Proportion ſtehen. Und die Dritte, von der Unität angerechnet (B) iſt eine Quadrat-Zahl. So werden auch alle Dritte überſchlagende oder überhüpffende D, F, H &c. Quadrat-Zahlen ſeyn. Iſt die Vierte C eine Cubic Zahl, ſo wird auch allezeit die Vierte überhüpffende F und I &c. eine Cubic Zahl ſeyn. Iſt die Siebende F zugleich eine Cubic- und Quadrat-Zahl, ſo wird auch allezeit die Siebende überhüpffende M &c. zugleich eine Cubic- und Quadrat-Zahl ſeyn.

1. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64. G 128. H 256. J 512. K 1024. L 2048. M 4096.

Beweiß.

Weil 1. A 2 B 4. in continuirlicher Proportion ſtehen, und B iſt eine Quadrat-Zahl, ſo wird auch [22. 8] die Unität eine Quadrat-Zahl ſeyn. Und weil B, C und D ebenfals in continuirlicher Proportion, ſo wird auch [22. 8] D eine Quadrat-Zahl, folglich auf dergleichen Art ferner F. H, K, M &c. iede eine Quadrat-Zahl ſeyn.

Wiederum, wegen continuirlicher Proportion 1. A, B, C, da C ein Cubus, wird die Unitæt

[23. 8.] auch ein Cubus, und wegen C, D, E, und F continuirlicher Proportion, [23. 8.] F, I, M &c. jede eine Cubic-Zahl ſeyn.

Auf ſolche Art, wie 1. A, B, C, D, E, F, mit F, G, H, I, K, L, M in continuirlicher Verhältnüs, wird auch gleich F, ſo wohl die Unitæt, nicht weniger M, eine Cubic- und Quadrat-Zahl zugleich ſeyn.

Nota, dieſe Propoſition iſt eine Examination und Beweiß der geometriſchen Progreſſion, wie dann hier 1. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64. &c. lediglich eine geometriſche Progreſſion.

Und alſo ſolche 8 Propoſition durch die Algebra eine an ſich ſelbſt bekande Sache, worüber wiederumb das Täfflein pag. 21 zu beſehen, allwo ſichs alſo finden wird.

1. Daß wenn B ein Quadrat oder Zenſus, ſo wird D, ZZ. F, ZZZ. H, ZZZZ &c. ſeyn.
2. Iſt C ein Cubus, ſo iſt auch F. Cz. I. CC &c.
3. Iſt F. CZ ſo wird M, ZCZ &c. ſeyn.

Die 9. Propoſition.

Wenn von der Unitæt an, einige Zahlen 1. A, B, C, D, E, F, G, H &c. in continuirlicher Proportion, und A nechſt der Unitæt iſt eine Quadrat-Zahl. So werden auch alle folgende B, C, D, E, &c. Quadrat-Zahlen ſeyn. Iſt aber A eine Cubic-Zahl, ſo werden auch alle folgende, B, C,

B, C, D, E, &c. Cubic-Zahlen ſeyn.

1 Satz. 1. A 4. B 16. C 64. D 256. E 1024. F 4096.

2 Satz. 1. A 8. B 64. C 512. D 4096. E 32768. &c.

Beweiß.

1 Satz. Weil 1 gegen A 4: wie A 4 gegen B 16. Und dahero A mit A. das iſt mit ſich ſelbſt multiplicirt (oder quadrirt) B hervor kommt. So wird [18 def. 7.] B eine Quadrat-Zahl ſeyn. Und alſo iſt auch [22. 8.] C und alle folgende iedes eine Quadrat-Zahl.

2 Satz. Auf dergleichen Art/ wenn A 8 eine Cubic-Zahl, iſt auch [3. 9.] B eine Cubic-Zahl. Und da B zu C, wie A zu B, ſo wird ebenfalls [25. 8.] C. und alle übrig folgende iede eine Cubic-Zahl ſeyn.

Nach der Algebra iſt es gleich klar.

Daß die erſte geometriſche Progreſſion in continuirlichen Quadrat-Zahlen.

Die andere Progreſſion aber in continuirlichen Cubic-Zahlen beſtehe.

Die 10. Propoſition.

Wenn von der Unitæt anfahende, einige Zahlen 1. A, B, C, D &c. in continuirlicher Proportion, und die Zahl A nechſt der Unitæt iſt keine Quadrat-Zahl. So wird auch keine andere, als die Dritte

te nach der Unitæt, nemlich B. und dann die überhüpffende D und F &c. iede eine Quadrat-Zahl ſeyn. Und da nach der Unitæt die A keine Cubic-Zahl, ſo wird auch keine andere, als nur nach der Unitæt die vierte C, und dann ferner die te nach zwey überſchlagenden oder überhüpffenden F, I &c. iede eine Cubic-Zahl ſeyn.

1. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64. G 128. H 256. I 512. &c.

Beweiß.

Hier iſt A, Radix, B, Zenſus, C, Cubus. D. ZZ, E, S 1. F. ZC, G. S 2. H, ZZZ, I. CC. Dahero ſeynd A, C, E, G und I keine Quadrat-Zahlen, wohl aber B, D, F, H &c.

Alſo ſeynd auch nur C, F und I &c. Cubic-Zahlen.

Es komt ferner dieſe Prop. mit vorhergehender 8. Propoſition gäntzlich überein.

Die 11. Propoſition.

Wenn von der Unität anfahende, einige Zahlen 1. A, B, C, D, E, F, &c. in continuirlicher Proportion ſtehen. Und eine kleinere (zum Exempel F) miſſet eine gröſſere (H). So werden auch alle

vorhergehende *A*, B, C, D und E die H meſſen.

1. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64. G 128. H 256.

Beweiß.

Dis iſt [20. def. 7.] eine an ſich ſelbſt bekande Warheit.

Die 12. Propoſition.

Wenn von der Unität anfahende einige Zahlen 1. A, B, C, D &c. in continuirlicher Proportion ſtehen. Und eine Prim-Zahl E, miſſet die letzte D. So wird auch dieſe E die A, als die nechſte nach der Unität, meſſen.

1. A 6. B 36. C 216. D 1296. E 3.

Beweiß.

Solte E die A nicht meſſen, ſo müſte [31. 7.] A zu E eine Prim-Zahl ſeyn. Da nun A quadrit B bringet, ſo wird auch [27. 7.] E zu B eine Prim-Zahl ſeyn, und alſo ferner were auch E zu D eine Prim-Zahl, ſo aber gegen die Propoſition ſtreitet. Dahero miſſet E ſo wohl die A als D. So zubeweiſen war.

Die 13. Propoſition.

Wenn von der Unität anfahende, einige in continuirlicher Proportion ſtehende Zahlen 1. A, B, C, D, E, ſeynd, und die

die Zahl A als die nechſte nach der Unität iſt eine Prim-Zahl So ſoll die Zahl E von keiner andern Zahl als nur von denen in ſolcher Proportion vorhergehenden Zahlen A, B, C und D, können gemeſſen werden.

1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F - -

Beweiß.

Wenn es möglich! ſo ſey F die Zahl, womit E könte gemeſſen werden. Da nun A eine Prim-Zahl, ſo kan F, [12. def. 7.] kein ander algemein Maaß, als nur die Unität, und folglich, alſo keine Zahl ſeyn.

Dahero auch kein ander algemein Maaß zu finden, womit E könne gemeſſen werden, als nur [7. 8.] von A, B, C und D allein.

Die 14. Propoſition.

Wenn einige Prim-Zahlen A, B und C, ihre kleinſte meſſende Zahl D meſſen. So kan ſolche Zahl D, von keiner einigen andern Prim-Zahl gemeſſen werden, als nur von die 3 erſt gemelden A, B und C.

A 3. B 4. C 5. D 60. E - -

Beweiß.

Man laſſe ſeyn, daß noch eine andere Prim-Zahl E vorhanden were, womit D könte gemeſſen werden. Da nun D die kleinſte Zahl zu

A, B, C geſetzet worden, alſo ſeynd auch [38.7.] A, B, C die kleinſten, ſo D meſſen.

Dahero kein ander Maaß E ſeyn kan, anders müſte D, von A, B, C, und auch E, alſo von 4 Zahlen, und mehr als 3 Zahlen A, B und C können gemeſſen werden, ſo wieder ſich ſelbſt ſtreitet.

Die 15. Propoſition.

Wenn 3 Zahlen A, B, C die kleinſten in continuirlicher Proportion ſeynd. So werden allezeit zwey (welche man auch nehme) zuſammen addirt, gegen die Dritte überbleibende, eine Prim-Zahl ſeyn.

A 4. B 6. C 9. D 2. E 3.

Erklärung und Beweiß.

Man ſaget; daß A + B gegen C, dann B + C gegen A, und A + C gegen B, Prim-Zahlen ſeynd.

1. Satz. Suche [35.7.] die kleinſte Verhältnüs zu A, B, C, nemlich D und E, ſo ſind dieſe beyde unter ſich [24.7.] item D + E gegen E [30.7.] auch Prim-Zahlen. Weiln nun D + E ingleichen D gegen E Prim-Zahlen, ſo wird auch [26.7] das Product von D + E mit D multipl daß iſt [3.2.] = A + B gegen E Prim-Zahlen, und folglich auch A + B gegen C (als dem Quadrat von E) Prim-Zahlen ſeyn.

2. Satz, eben auf ſolche Art wird auch bewieſen, daß C + B gegen A Prim-Zahlen.

3.

3 Satz. Weil [26. 7.] B gegen D + E Prim-Zahlen, alſo auch B gegen dem □ D + □ E. das iſt A + C. So zubeweiſen war.

Die 16. Propoſition.

Wenn zwey Zahlen A und B Prim-Zahlen ſeyn, ſo ſoll die andere B nicht ſeyn, zu einiger Dritten C, als die Erſte A gegen B.

A 4. B 5. C ..

Erklärung und Beweiß.

Es kan keine Zahl gefunden werden, die gegen B ſich verhalte, wie B gegen A. Denn ſo dieſes were, würde [20. 7.] das Product von A mit C = ſeyn, dem Quadrat von B. und dahero B keine Prim-Zahl ſondern eine Flach-Zahl, wie auch A mit C ſeyn. Welches alſo gegen die Prop. ſtreitet.

Nota, dis iſt allezeit in gantzen Zahlen zu verſtehen, anders könte wohl A 4. B 5. C 6 $\frac{1}{4}$. in continuirlicher Proportion ſtehen, und A gegen B 5. wie B 5 gegen C 6 $\frac{1}{4}$. ſich verhalten.

Die 17. Propoſition.

Wenn etliche Zahlen A, B, C, D in continuirlicher Proportion, und die Erſte A, und die Letzte D, ſeynd unter ſich Prim-Zahlen. Soll die Letzte D, zu einiger andern nicht ſeyn, als die Erſte A, zu der andern B.

A 8. B 12. C 18. D 27. E ..

Beweiß.

Angeſehen, daß verwechſelt [12. d. 5.] A zu D, alſo B zu E ſeyn müſte. Da nun A gegen D Prim-Zahlen, ſo iſt [16. 9] nach D keine proportionirte Zahl, un̄ alſo noch viel weniger eine andere E zufinden.

Nota, hier iſt ebenfals wieder zu erinnern daß es allein in gantzen Zahlen zu verſtehen, anders könten mit Brüchen oder Theilen, unendliche Zahlen angegeben werden.

Die 18. Propoſition.

Zu unterſuchen, ob zu 2 gegebenen Zahlen A und B, noch eine Dritte C, in continuirlicher Proportion kan gefunden werden.

1 Satz. A 4. B 6. C 9. D 36. 2 Satz. A 8. B 10. C .. D 100.

Operatio und Beweiß.

1 Satz. Quadrire B 6 komt D 36. dis □ D durch A 4 gemeſſen, bringt [9. ax. 7.] C 9. die Dritte gleich verhaltende.

2 Satz. Hingegen B 10. quadrit komt D 100. dis □ D 100 nun kan von A 8 nicht gemeſſen werden (in gantzen Zahlen.) Dahero kan auch zu A 8. und B 10. keine Dritte Zahl C [20. 7.] gefunden werden.

Die 19. Propoſition.

Zu unterſuchen, ob zu drey gegebenen Zahlen A, B und C, die Vierte D in con-

continuirender Proportion könne gefunden werden.

1 Satz. A 8. B 12. C 18. D 27. E 216. 2 Satz A 4. B 6. C 9. D - E 54.

Operatio und Beweiß.

1 Satz. multiplicire B mit C bringt [16. def. 7.] die Flach-Zahl E. kan nun ſolche Flach-Zahl E, durch die Zahl A abgemeſſen werden, ſo giebt ſolches [7. ax. 7.] die Vierte D.

2 Satz. Wenn aber nach multiplicirten B, mit C, die hervorkommende Flach-Zahl E durch die Zahl A nicht kan gemeſſen werden. So iſt auch keine begehrte Vierte Zahl D zufinden.

In Zahlen.

1 Satz B 12. mit C 18 multipl. bringt E 216. dis durch A 8 abdividirt oder ausgemeſſen bringt die Vierte Zahl D 27. hervor.

2 Satz. B 6. mit C 9. multipl. bringt E 54. dis kan nun durch A 4. nicht ausgemeſſen (das iſt juſt auffgehend dividirt) werden. Dahero auch keine Vierte Zahl D hervor zubringen.

Nota, Bruchweiſe gieng dieſes wohl an, allein wie ſchon etliche mal erinnert worden, iſt ſolches nur in gantzen Zahlen zu verſtehen.

Die 20. Propoſition.

Es ſind allezeit noch mehrere Prim-Zahlen zufinden, ſo viel deren auch mögen angegeben werden (nemlich: Es iſt deren Zahl unendlich.)

A 3. B 5. C 11. D 165. E 166.

Operatio und Beweiß.

Man ſuche [38. 7.] zu denen geſetzten Prim-Zahlen A, B, C, die kleinſte Zahl D, (nemlich: Die von A, B, und C kan gemeſſen werden) addire hierzu die Unität, ſo komt die Zahl E. Iſt nun E eine Prim-Zahl, ſo muß ſie nothwendig [9. ax. 1.] gröſſer als einige der vorhergehenden A, B, C, und alſo über vorige, eine andere Prim-Zahl ſeyn.

Iſt E aber ein Numerus Compoſitus, ſo were nach abgezogener Unität D wiederum die kleinſte Zahl, ſo von denen geſetzten Prim-Zahlen A, B und C [38. 7.] gemeſſen würde. Dahero wie viel man der Prim-Zahlen auch ſetzet, dennoch mehrere können angegeben oder gefunden werden.

Die 21. Propoſition.

So viel gerade oder gleiche Zahlen A, B, C, D &c. zuſammen addiret werden. So wird auch allezeit die heraus kommende ſumma E, eine gerade oder gleiche Zahl ſeyn.

A 8. B 10. C 6. D 4. ſumma E 28.

Beweiß.

Dis iſt [2 ax. 1. und 8. def. 7.] eine an ſich ſelbſt bekande Warheit.

Die 22. Propoſition.

Wenn etliche ungleiche Zahlen A, B,

C,

C, D, iedoch in gerader Anzahl, zuſammen addiret werden. So wird deren ſumma E auch gleich ſeyn.

A 11. B 7. C 9. D 3. ſumma E 30.

Beweiß.

Weil ie 2 ungleiche Zahlen zuſammen addirt, allezeit eine gleiche Zahl hervor bringen, als werden [2. ax. 1.] alle ungleiche Zahlen, in gerader Anzahl, zuſammen addirt, eine gleiche Summa hervor bringen.

Die 23. Propoſition.

Wenn etliche ungleiche Zahlen *A*, B, C, D, E, in ungleicher Menge zuſammen addiret werden. So wird deren ſumma auch ungleich ſeyn.

A 3. B 5. C 7. D 9. E 11. ſumma 35.

Beweiß.

Man nehme erſtlich davon die in gerader Anzahl A, B, C, D, und addire ſolche zuſammen, ſo wird die daraus entſtehende Summa [22. 9] gleich oder eine gerade Zahl ſeyn, hierzu addire ferner die übrige ungleiche Zahl E. So wird, weil gleich zu ungleich addiret worden [4. ax. 1.] die Summa A, B, C, D, E, ungleich ſeyn. So zubeweiſen war.

Die 24. Propoſition.

So von einer gleichen Zahl *A*, eine

gleiche Zahl abgezogen wird. Der Reſt oder der Uberſchuß C, ſoll auch gleich ſeyn.

A 16.
B 10.
C 6.

Beweiß.

Dis iſt [3. ax. 1.] eine bekande Warheit.

Die 25. Propoſition.

So von einer gleichen Zahl A eine ungleiche Zahl B abgezogen wird. Der Reſt C ſoll ungleich ſeyn.

A 12.
B 9.
C 3.

Beweiß.

Iſt [5. ax. 1.] vice verſa eine an ſich ſelbſt klare Sache.

Die 26. Propoſition.

Wenn man von einer ungleichen Zahl A, eine ungleiche Zahl B ſubtrahirt. Der Reſt C wird gleich ſeyn.

A 11.
B 5.
C 6.

Beweiß.

Wenn gegentheils B ungleich zu C gleich addirt [4 ax. 1.] ungleich nemlich: A hervorbringet. So wird auch vice verſa, B ungleich wieder von A ungleich, C gleich hervorbringen.

Die 27. Propoſition.

Wenn man von einer ungleichen Zahl A ei-

A eine gleiche Zahl B ſubtrahirt. Der Reſt C ſoll ungleich ſeyn.

A	9.
B	6.
C	3.

Beweiß.

Da [24 9] gleich von gleich abgezogen, auch gleich in Reſt bringet. So muß hier gleich von ungleich abgezogen / auch gleich ✚ die Unität, das iſt ungleich in Reſt bringen. Uber dis iſt ſolches auch [5 ax. I.] eine bekande Warheit.

Die 28. Propoſition.

So eine ungleiche Zahl A, eine gleiche Zahl B multiplicirt. Das Product C ſoll gleich ſeyn.

A 7 mit B 4. bringt C 28.

A	7.
A	7.
A	7.
A	7.
C	28.

Beweiß.

Weil multipliciren anderſt nichts, als eine vermehrte Addition. Und alſo hier A nach der Anzahl oder Benennung B 4 mahl addirt, wird [22. 9.] die Summa C, gleich hervor bringen.

Die 29. Propoſition.

Wenn eine ungleiche Zahl A, eine ungleiche Zahl B multiplicirt, das Product C ſoll ungleich ſeyn.

A 9. mit B 3. bringt C 27.

Be-

Beweiß.

Iſt gleich viel, als würde A nach Anzahl B 3 mahl zuſammen addirt, da denn [23. 9.] die Summa oder das Product C ungleich ſeyn wird.

Die 30. Propoſition.

Wenn eine ungleiche Zahl A, eine gleiche Zahl B mißet. So wird auch A die Helffte von B, nemlich D meßen.

A 5 B 20 die Helffte D 10.
C 4 mal 2 mal

Beweiß.

Die ungleiche Zahl A mißet [9. def. 7.] die gleiche Zahl B, gleich aus C. Weil nun C auch kan halbiret werden, ſo wird auch A [33. 7.] die Helffte von B, nemlich die D meßen.

Die 31. Propoſition.

Wenn eine ungleiche Zahl A, zu einer andern Zahl B eine Prim-Zahl iſt. So wird auch A zu C, als der doppelten B eine Prim-Zahl ſeyn.

A 3. B 8. C 16.

Beweiß.

Wie B die C doppelt mißet, alſo verwechſelt C die B mit der Helffte. Weil dahero C die B mißet, wird [25. 7.] C gegen A eine Prim-Zahl ſeyn.

Die

Die 32. Propoſition.

Jede in doppelter oder gerade ſich befindende Zahlen A, B, C, D &c. ſeynd mit A gleich gerade.

A 2. B 4. C 8. D 16. &c.

Beweiß.

Es iſt [6 def. 7.] alzu warhafft, daß alle dieſe Zahlen gleich oder gerade Zahlen seyn müſſen, Auch [20 def. 7] in continuirlicher Proportion, und mit A. alle gleich gerade.

Alſo geſchiehet ebener maßen, wenn ſelbige auch nicht in continuirlicher Proportion ſtehen. Zum Exempel.

A 6. B 10. C 12. D 20 &c.

Die 33. Propoſition.

Wenn eine Zahl A, eine ungleiche Helffte B hat, ſo iſt ſolche Zahl A, eine gleich ungerade Zahl.

Beweiß.

A 22. B 11. Diß iſt die 9 Definition des 7ten Buchs, nemlich: Der ungleichen Zahl B 11. gleiche Zahl iſt A 22.

Weil ſie dahero (A 22) aus ungleich B 11. mit gleich 2 componirt, wird ſolche eine gleich ungerade Zahl genennet.

Die

Die 34. Propoſition.

Wenn eine gerade Zahl *A*, weder eine doppelte Zahl von einer geraden, noch auch eine ungerade Helffte hat. So iſt ſie gleich gerade, und auch gleich ungerade.

A 36.
B 18.
C 9.

Beweiß.

1 Satz. Weil A keine ungerade Helffte B hat, ſo iſt A [33. 9.] eine gleich gerade Zahl.

2. Satz. Da ſie auch nicht gleich gerade [32. 9.] genommen worden, ſo wird endlich nach continuirlicher Halbirung eine ungerade Zahl C erſcheinen. Umb welcher Urſach halben, denn auch A zugleich, eine gleich ungerade Zahl iſt.

Die 35. Propoſition.

So einige continuirlich proportionirte Zahlen ABCD ſeynd, und wird *A* von der andern und letzten D abgezogen. So ſoll der Uberſchuß E gegen A ſich verhalten, als der Uberſchuß F gegen A + B + C.

A 8. B 12. C 18. D 27.

A	8	A	8.
E	4	F.	19

Sche-

Schema der Demonſtration

A 8.	B 8 }12	C 8. }	D 8 }
	E 4 }	G 4. }18	H 4 }
		I 6. }	K 6 } F. 27.
			L 9 }

Beweiß.

1. Rangire und zerlege A, B, C, D nach deren Verhåltnůs alſo: und ſetze erſtlich A 8. B 8. C 8. und D 8.

2. Weil die Verhåltnůs B gegen A, umb den Uberſchuß E 4. gròßer. So ſetze dieſen Uberſchuß auch zu denen folgenden Proportional-Zahlen durch G und H.

3. Wegen des Uberſchußes E 4. wird in continuirlicher Proportion C noch gròßer, umb ſolchen Uberſchuß E, und noch darzu umb die Verhåltnůs A 8 gegen E 4. Das iſt 2. alſo zuſammen um I, 6. Dieſe I, 6. hålt auch D, nemlich K.

4. Endlich wird D, wegen continuirender Verhåltnůs noch gròßer, umb den Uberſchuß I 6. und noch darzu der Verhåltnůs A gegen E, das iſt 3. alſo zuſammen L 9.

Durch dieſes

Jſt dann der continuirlichen Proportion Natur und Zerlegung klar zu ſehen, und daß die Zerlegung D ſey.

H 4	gegen	A 8	
K 6	gegen	B 12	
L 9	gegen	C 18	
wie F 19	gegen	38.	A + B + C. das iſt wie

E 4 gegen A 8.

Die

Die 36. Propoſition.

Wenn von der Unität an, einige Zahlen 1. A, B, C, D &c. in continuirlicher doppelten Proportion (das iſt wie 1 zu 2) ſtehen, und durch deren Addirung die Summa eine Prim-Zahl E hervor bringende, dieſe Prim-Zahl E wieder mit der letzten Zahl D multiplicirt wird. So ſoll das Product F, eine perfecte oder vollkommene Zahl ſeyn.

1. A 2. B 4. C 8. D 16. ſumma E 31. eine Prim-Zahl, dieſe E 31 mit D 16. multipl. bringt das Product F 496. eine perfecte, oder vollkommene Zahl hervor.

Erklärung.

Von was Natur eine perfecte Zahl ſey, iſt zwar albereit durch die 22. Definition des ſiebenden Buchs feſt geſtellet, und die Erklärung einiger maaſſen daſelbſt bey notiret worden. Jedoch aber dis hier noch malen wiederhohlende. So zerlege man die hervor gekommene perfecte Zahl F 496. in ihre behörige Theile, als

Sche-

Schema der Demonſtration.

	Unität	1
	A	2
	B	4
	C	8
Summa	D	16
31. mit der Unit. 1. mult.	E	31
31. mit A 2 mult.	G	62
31. mit B 4 mult.	H	124
31. mit C 8 multipl.	J	248.
die perfecte Zahl	F	496.

Beweiß.

1. Formire das Schema wie zuſehen.

2. Es iſt klar [20. def. 7.] daß A 2. B 4. C 8. D 16. mit E 31. G 62. H 124. J 248. in gleicher Proportion, item, [14.7.] A 2 zu E 31. als D 16 zu I 248.

3. Dahero [19.7.] das Product A 2. mit I 248. nemlich 496 = E 31. mit D 16. = F 496. und alſo ſtehet 1. A 2. I 248 F 496. item 1. A 2. B 4. C 8. D 16. mit E 31. G 62. H 124. I 248. F 496. in gleicher Proportion.

4. Weil [1.8.] 1. A 2. B 4. C 8. D 16. die kleinſten in ſolcher Verhältnüs, ſo werden ſelbige [21.7.] E, G, H, J und die perfecte Zahl F meſſen. item da E mit D multipl. die F hervor-

gebracht (wie oben beyn 3ten Satz zuſehen) ſo wird E die F, ingleichen auch [21. 7.] G,H. und J die F meſſen. Und dieſem nach F eine perfecte oder vollkommene Zahl ſeyn.

Des neunden Buchs Ende.

Das

Das Zehende Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1. Commenſurable oder ermeßliche Quantitäten, Gröſſen oder Zahlen, werden diejenige genennet, welche durch eine Gröſſe oder Zahl können gemeſſen werden

6 13
A B

Alſo iſt die Länge A von 6 Fuß/ gegen der Länge B von 13. Fuß commenſurabel oder ermeßlich/indem iede Länge mit dem Fuß-Maaß kan abgemeſſen werden. Item, $\surd 12$ gegen $\surd 27$. iſt auch commenſurabel oder in Länge ermeßlich, als die man beyde, durch ein algemeines Maaß $\surd 3$ ausmeſſen kan ſo $\surd 4$ gegen $\surd 9$ hervor bringet. Welches gleich 2 gegen 3.

2. Incommenſurable oder unermeßliche Gröſſen oder Zahlen ſeynd, zu welchen kein algemein Maaß kan gefunden werden.

Alſo iſt $\surd 3$ für ſich ſelbſt, und gegen 4 incommenſurabel oder unermeßlich, weil $\surd 3$ ſurdiſch oder irrational und dieſer Quantität o-

der Gröſſe Quadrat-Wurtzel, in gemeinen Zahlen nicht möglich auszurechnen oder accurat zufinden.

Die Zahl 4 iſt wohl ermeßlich, als welche durch 12. 8. 4. 2. 1. ½ ¼ &c. juſt auszumeſſen. Da aber $\sqrt{3}$ gantz und gar nicht (gleich aufgehend) zumeſſen oder zu theilen, als ſeynd ſolche beyde Quantitäten oder Zahlen $\sqrt{3}$ und 4 gegen einander in Länge unermeßlich, das iſt gerad aufgehend) untheilbar.

3. Rechte oder gerade Linien ſeynd (potentia commenſurabiles) ermeßlich in Macht. Wenn derſelben Quadrata oder Flächen Inhalt, durch eine andere Fläche ermeßlich oder auszumeſſen.

Alſo ſeynd die Linien oder Seiten AB 6 und CD $\sqrt{12}$ gegen einander ermeßlich in Macht. Weil beyder quadraten Inhalt 36. und 12. durch des recht winckFlichten Vierecks EFG Inhalt 6. auszumeßen.

Und dieſemnach können unzehliche Flächen angegeben werden, deren Seiten zwar per ſe in Länge incommenſurabel, dennoch aber in Macht gegen einander ermeßlich ſeyn.

Zum Exempel: an beyden Flächen, derer rectang. HIK und LMN ſeynd die Seiten HI $\sqrt{30}$. IK $\sqrt{18}$. MN $\sqrt{10}$. per ſe oder in Länge incommenſurabel. Hingegen aber in Macht ermeßlich, weiln beyder Flächen Inhalt $\sqrt{540}$. und $\sqrt{360}$. mit einem allgemeinen Maaß, als $\sqrt{2}$. $\sqrt{3}$. $\sqrt{5}$. &c. oder auch durch 2. 3. &c. auszumeßen.

4. Rechte oder gerade Linien aber ſeynd, potentia incommenſurabiles, das iſt unermeßlich in Macht, wenn deren quadrata oder Flächen, durch keine andere Fläche gemeßen, oder ein allgemein Maaß dazu kan gefunden werden.

Alſo ſeynd hier beyder quadraten Seiten BC 6 + √ 5. und EF √ 15. gegen einander unermeßlich in Macht, weil zu beyden quadraten (41 + √ 720. und 15.) vielweniger zu deren Seiten ein allgemein Maaß zu finden.

5. Dieſemnach iſt bekannt, daß alle rechte Linien ſeynd, ſo wohl ermeßliche als unermeßliche. Einige ſeynd ermeßliche in Länge und Macht, andere in Macht allein.

Dieſe alle werden ermeßliche oder proportionirte (rationales) Linien genennet.

Nota. Hiervon geben folgende Definitiones mehrere Erläuterung.

6. Alſo werden dieſe meßbare oder ermeßliche rechte Linien, ſo entweder in Länge und Macht allein (potentia tantum) ermeßlich, gleichmäßig oder gleich verhaltende (rationales) genennet.

Nota. Hier iſt der Unterſcheid zu beobachten, daß, rechte Linien ermeßlich in Länge und Macht ſeynd, nach vorhergehender 1. Definition. Ermeßliche in Macht allein aber, ſeynd durch die vorhergehende 3. Definition zu verſtehen.

7. Unermeßliche aber, werden genennet ſurdiſche (irrationales.)

Nota. Dieſe ſeynd, durch vorhergehende 2. Definition dargeſtellet.

8. Und das Quadrat ſo auf eine rechte Linie geſtelt oder gemachet iſt, wird gleich verhaltend (rational) genennet.

Hierdurch iſt ein iedes Quadrat, ſo auf eine ermeßliche rechte Linie oder Seite gemachet wird, zu verſtehen.

9. Und alle Flächen, die mit einem vorher (der 8. Defin.) geſagten quadrat ermeßlich ſeynd, werden proportionirte, ermeßliche Flächen (rationalia) genennet.

Nota. Hier iſt die 1. und 3. Definition wieder zu verſtehen.

10. In Gegentheil alle Flächen, ſo mit gemelden quadrat (der 8. Definition) unermeßlich ſeynd, werden unermeßliche Flächen, das iſt incommenſurable oder ſurdiſche Flächen (irrationalia) genennet.

Eine dergleichen Fläche kan zum Exempel ſeyn das regular 3 Eck, deßen Seite A B $\sqrt{19}$. und alſo viele andere mehr.

11. Und dieſer ietzt gemeldeten Flächen (der 10. Definition) Seiten, werden unermeßliche, das iſt, ſurdiſche incommenſurable (irrationales) genennet.

Alſo iſt vorher erwehnten regularen 3. Ecks Seite A B $\sqrt{19}$. unermeßlich, ſurdiſch, und in gemeinen Zahlen ermeßlich nicht anzugeben.

Po-

Poſtulatum oder Begehrung.

1. Man verlanget einige Gröſſe ſo vielmahl zu multipliciren, biß ſie endlich eine gegebene Gröſſe übertrifft.

Axiomata oder bekandte Wahrheiten.

1. Eine Gröſſe, einige andere Größen meßende, mißet auch etliche aus denenſelben zuſammen geſetzte.

Zum Exempel die Gröſſe 3. einige andere 6. 12. 24. 15. 18. meßende, mißet auch etliche von deuenſelben 12. 15. 18. zuſammen geſetzte oder addirte 45.

2. Eine Gröſſe, eine andere Größe meßende, miſſet auch diejenige Größe, welche von ermelder andere Größe gemeſſen wird.

Zum Exempel 5. eine andere Gröſſe 15. meſſende, miſſet auch diejenige Gröſſe 30. als welche von 15. gemeſſen wird.

3. Eine Größe, eine andere gantze Größe, und zugleich einem davon abgeſonderten Theil meſſende, miſſet auch dem Reſt oder das überbliebene.

Alſo die Größe 4. eine andere gantze Gröſſe 24. und einem Theil von 8. meßende, miſſet auch dem Reſt 16.

Hier ſolte nun in der Ordnung die 1. Propoſition folgen. Weiln aber in dieſen 10ten Buch künfftig hin verſchiedene irrational-Linien und Flächen (deren zwar nach der 112. Propoſition dieſes 10ten Buchs erſtlich gedacht wird, und

gleichwohl mit der 22ten Propoſition dem Anfang nehmen,) ſo ihre beſondere Eigenſchafften, und auch à parte Benennungen oder Nahmen haben fürkommen. Welcher Begriff oder deren eigentliche Verſtändnis, auch nur in etwas vorhero zu erlangen, ſehr dienlich erachte: Indem bey nahe, dis 10te Buch ſich faſt gäntzlich darauf gründet.

Als vermeine der Nothdurfft gemäß zu ſeyn, (gleichſam zu einem Vorſpiel) davon durch folgende Anmerckungen, einige Erklärung voraus zu thun.

Und da vor ietzo deren Eigenſchafft in Linien auch Zahlen hier deutlich vorzuſtellen, zwar nichts ermangeln ſoll. So wird doch, wie etwa die dabey nöthig habende Zahlen componirt, ingleichen der Beweiß, und anderes, durch das folgende beſſer bekand, und alſo nachgeholet werden müſſen.

So wenig nun ein Incipient Anfangs hiervon faſſet, oder genau examiniret, wird ihme ſolches nichts deſto weniger bey hernach folgenden Propoſitionen treflich wohl zu ſtatten kommen.

I. Anmerckung,

(Media) Mittel-Linie oder Mitliſch.

(Media) Mittel-Linie oder Mitliſch iſt [22.10] da allbereit erinnerter maßen [3 def. 10.] ein rectangulum HIKL, aus zweyen nur in Macht allein ermeßlichen Seiten HI $\sqrt{10}$. und IK $\sqrt{7}$. beſte-

beziehet. Dieſe dann in einander multiplicirt thut $\surd$ 70. Hieraus die quadrat Wurtzel extrahirt, bringt $\surd\surd$ 70. vor M N. ſo (Media) eine Mittel-Linie.

Nota. Dieſe M N iſt das medium proportionale zwiſchen H I und I K, oder die Seite des quadrats M N O P, ſo dem rectang. H I K L an Inhalt $\surd$ 70. gleich iſt.

2. Anmerckung,

(Rectangulum Medium) eine Mittel-Fläche.

Eine Mittel-Fläche entſtehet [25. 10] aus 2. Mittel-Linien, oder aber, da 2. Mittel-Linien in einander multipliciret werden.

Zum Exempel A B $\surd\surd$ 486. und B C $\surd\surd$ 96. in einander multiplicirt, giebt $\surd\surd$ 46656 oder $\surd$ 216 vor dem Inhalt der Mittel-Fläche ABCD.

Nota. Es kan aber einer Mittel-Fläche Inhalt ſowohl rational, als auch irrational ſeyn, wovon folgende 26 und 27. Propoſition mehrere Erläuterung geben werden.

3. Anmerckung

(Binomium) eine zweynahmige Linie.

Ein Binomium iſt eine Linie, aus 2 Theilen beſtehende, davon der eine Theil E F 6 (rational) der andere Theil F G $\surd$ 18 (irrational) werden mit dem Zeichen + connectirt, welches dann ein Binomium E G dargiebt, nemlich 6 + $\surd$ 18. [37. 10]

Und dieſem nach viele andere mehr

Nota, es ſeynd zwar vornehmlich 6erley Arten derer binomiorum, welche ihre beſondere Eigenſchafften haben, wovon folgende 49. 50. 51. 52. 53 und 54 Propos. ausführliche Nachricht geben.

4. Anmerckung
Erſte bimedial Linie.

Wenn 2 (media) Mittel-Linien HI √√ 108 und IK √√ 12 (ſo gegen einander allein in Macht ermeßlich, und ein rational rectangulum HIKL (6) beſchlieſen) zuſammen addirt werden, ſo entſtehet daraus eine Erſte bimedial Linie HK √√ 108 + √√ 12. Und dieſem nach unzehlige andere mehr [38. 10]

5. Anmerckung
Die andere bimedial Linie.

Wenn 2 (media) Mittel-Linien MN √√ 96. und NO √√ 6. (ſo gegen einander in Macht allein ermeßlich, und ein rectangulum medium MNOP √ 24. beſchlieſen) zuſammen addirt werden, ſo entſtehet daraus die andere bimedial Linie MO √√ 96 + √√ 6. Und dieſen nach andere unzehlige mehr [39. 10]

6. Anmerckung
(Major) groſe Linie.

Wenn 2 rechte Linien QR √: 6 + √ 10 und RS √: 6 − √ 10 (ſo gegen einander in Macht un-

unermeßlich, deren addirte quadrate Q W und W T eine rational Fläche (12) beſchließen, auch das von ihnen beſchloßene rectangulum W S ein rectang. Medium ($\surd$ 26) hervor bringet) zuſammen addirt werden; So entſtehet aus dergleichen addirten Linien, die Linie QS $\surd: 6 + \surd 10 + \surd: 6 - \surd 10$. welche (Major) oder die Groſſe genennet wird.

Und alſo andere unzehlige mehr [40. 10]

7. Anmerckung
(Media potens) eine in Macht ermeßliche Mittel-Linie.

Wenn 2 rechte Linien AB $\surd: \surd 7\frac{1}{2} + \surd 3\frac{1}{2}$ und BC $\surd: \surd 7\frac{1}{2} - \surd 3\frac{1}{2}$ (ſo gegen einander in Macht unermeßlich, und von ſolcher Eigenſchafft; daß deren zuſammen addirte quadrate A E und E D ein rectang. Medium ($\surd$ 30.) machen, auch das von ihnen beſchloſſene rectang. E C eine rational Fläche (2) hervorbringet) zuſammen addiret werden So wird dergleichen addirte Linie AC $\surd: \surd 7\frac{1}{2}. + \surd 3\frac{1}{2}. + \surd: \surd 7\frac{1}{2}. - \surd 3\frac{1}{2}$ (media potens) eine in Macht ermeßliche Mittel-Linie genennet.

Und dergl. ſeynd viele andere mehr [41. 10]

8. Anmerckung
(bina media potens) eine doppelte in Macht ermeßliche Mittel-Linie.

Wenn 2 rechte Linien FG $\surd: \surd 5 + \surd 2$ und

G H

GH $\surd : \surd 5 - \surd 2$ (ſo gegen einander in Macht unermeßlich, und deren zuſammen addirte Quadrate FI und IK ein rect. medium ($\surd 20$) machen/ auch daß von ihnen beſchloßene rectang. IH ein rect. Medium ($\surd 3$) hervorbringet) zuſammen addiret werden. So wird dergleichen addirte Linie FH. $\surd : \surd 5 + \surd 2. + \surd : \surd 5 - \surd 2$ (bina media potens) eine in Macht doppelte ermeßliche Mittel Linie genennet.

Und alſo auch dergleichen andere mehr [42. 10.]

9. Anmerckung
(Apotome oder Reſiduum) eine abgekürtzte Linie.

Wenn von einer rechten Linie LN 8 (als rational) das Theil LM $\surd 17$ (ſo irrational) abgezogen oder weggenommen wird. So iſt der Reſt MN $8 - \surd 17$ (ein Apotome oder reſiduum) eine abgekürtzte Linie [74. 10]

Nota, es ſeynd zwar vornemlich 6erley Arten derer abgekürtzten Linien, von beſonderer Eigenſchafft zu mercken, welches folgende 86. 87. 88. 89. 90 und 91ſte Propoſition anzeigen, und alſo ausführlich daſelbſt zu erſehen ſeyn wird.

10. Anmerckung
(Mediæ apotome prima) die erſte mittlere abgekürtzte Linie.

Wenn von einer Mittel-Linie OP $\surd\surd 128$. eine

eine andere Mittel-Linie OQ $\sqrt{\sqrt{32}}$ (ſo mit jener OP in Macht ermeßlich, und eine rational Fläche OPRQ (8) beſchließen) weggenommen wird. So wird der Reſt QP $\sqrt{\sqrt{128}} - \sqrt{\sqrt{32}}$ genennet (mediæ apotome prima) der mitlern Linie erſtes Reſiduum oder/ die erſte mittlere abgekürtzte Linie [75. 10.]

Nota, Iſt vorherg. 4 Anmerckung conform, nur daß hier ſubtrahirt, und dort addirt wird.

11. Anmerckung
(Mediæ apotome Secunda) die andere mitlere abgekürtzte Linie.

Wenn von einer Mittel-Linie ST $\sqrt{\sqrt{96}}$ eine andere Mittel-Linie SV $\sqrt{\sqrt{6}}$. ſo mit jener ST in Macht ermeßlich und ein rectang. Medium STXV ($\sqrt{24}$) beſchließen) weggenommen wird. So iſt der Reſt VT $\sqrt{\sqrt{96}} - \sqrt{\sqrt{6}}$. welches man nennet (mediæ apotome Secunda) die andere mittlere abgekürtzte Linie [76. 10]

Nota, betrachte vorherg. 5te Anmerckung, alwo dort addirt, hier aber ſubtrahirt wird.

12. Anmerckung
(Minor) die kleine Linie.

Wenn von einer rechten Linie WY $\sqrt{:6+\sqrt{10}}$ eine andere WZ $\sqrt{:6-\sqrt{10}}$ (ſo gegen einander in Macht unermeßlich, und deren addirte Quadrate WY $6+\sqrt{10}$ WZ $6-\sqrt{10}$ zuſammen (12) rational, auch das von ihnen beſchloſ-

ſchloßene Rectangulum WYXZ ein rect. medium ($\sqrt{26}$) hervor bringet) ſubtrahirt wird. So iſt der Reſt ZY $\sqrt{:}\ 6 + \sqrt{10} - \sqrt{:}6 - \sqrt{10}$. (minor) oder die kleine Linie [77. 10]

Nota, beſiehe vorherg. 6 Anmerckung, dort wird addirt und hier ſubtrahirt.

13. Anmerckung
(cum rationali medium totum efficiens) eine mit der rationale gantzes medium austragende.

Wenn von einer rechten Linie AB $\sqrt{:}\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{3\frac{1}{2}}$ eine andere AC $\sqrt{:}\sqrt{7\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{2}}$ (ſo gegen einander in Macht unermeßlich, und deren zuſammen addirte quadrate AB $\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{3\frac{1}{2}}$ AC $\sqrt{7\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{2}}$ (alſo $\sqrt{30}$) ein rect. Medium. ingleichen das von beyden Linien beſchloßene rectang. ABDC rational (2) hervorbringen) ſubtrahirt wird. So iſt der Reſt CB $\sqrt{:}\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{3\frac{1}{2}} - \sqrt{:}\sqrt{7\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{2}}$ eine mit dem rationale gantzes Medium austragende, Linie [78. 10]

Nota, halte vorhergehende 7. Anmerckung gegen dieſe.

14. Anmerckung
(cum medio medium totum efficiens) eine mit der Medial gantzes Medium austragende.

Wenn von einer rechten Linie EF. $\sqrt{:}\sqrt{5} + \sqrt{2}$ eine andere EG $\sqrt{:}\sqrt{5} - \sqrt{2}$. (ſo gegen ein=

einander in Macht unermeßlich, und die zuſammen addirten quadrate EF $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ und EG $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (alſo zuſammen $\sqrt{20}$) medial, auch das von beyden beſchloßene rectang. EFH G ein rect. Medium ($\sqrt{3}$) hervorbringet, ſo mit denen zuſammen addirten quadraten ($\sqrt{20}$) incommenſurabel) ſubtrahirt wird. So iſt der Reſt GF $\sqrt{:\sqrt{5}+\sqrt{2}}.-\sqrt{:\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. eine mit der Medial gantzes, Medium austragende Linie [79. 10]

Nota, Man kan hierbey vorherg. 8. Anmerckung mit obſerviren.

Die 1. Propoſition.

Wenn 2. ungleiche Größen A E und B gegeben werden, da man von der Größten A E wegnimmet A C (welche A C etwas mehr als die Helffte A E) von C E wiederumb C D etwas mehr als die Helffte C E, und allezeit ſo fort. Wird endlich D E kleiner als B übrig bleiben.

Beweiß.

Ob dis zwar eine an ſich ſelbſt vernunfftmäßige Warheit. So ſey doch [Poſt. 10] B ſo vielmahl multiplicirt, bis F G die A C an näheſten übertreffe. Und mache F H = B alſo auch H I und I G. Wenn nun von A E ſo vielmal immer die Helffte mehr weggenommen wird, als ſo viel Theile

Theile F G hält. So iſt klar/ daß G H größer (nemlich: die von der Größern F G mehr als die Helffte) als C E, in ſolcher maßen iſt auch G I größer als D E, alſo B = I G größer als D E. So zu beweiſen war.

Anhang.

Eben dis würde erfolgen/ wenn von A E, auch nur erſtlich die Helffte A C, von dem übrigen C E wiederum die Helffte C D, und ſo fort weg genommen wird, endlich der Reſt D E kleiner als B übrig bleiben ſolte.

Die 2. Propoſition.

Wenn 2 ungleiche Größen A B und C D gegeben werden, da man die kleinſte A B von der Größern C D ſubtrahirt. Den Uberſchuß D F wiederum von A B ſo offt, bis G B übrig bleibet. Dis G B wiederum von D F, und alſo wechslende fort. Und niemaln der Uberſchuß einige der vorhergehenden Größen mißet, ſo werden ſolche 2 Größen A B und C D unermeßlich ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt zwar anders nichts, als vorhergehenden 7 Buchs 1 Propoſition, und nur in dem unterſchieden, daß die Operation dort mit der Unität ſich zu endigen oder damit zu meßen geſaget

get worden, hier aber in Linien noch ſubtiler, und wegen ſo vieler Irrational-Linien, faſt auf unendliche Art zu verſtehen.

Dieſem nun einige Genüge zu leiſten, läſſe man gelten, daß wenn es nicht alſo: ſondern A B gegen C D ermeßlich were, ſo müſte dieſem nach ein algemein Maaß zum Ex. E verhanden ſeyn. Da aber der Abzug immer wechſelweiſe ſo offt geſchehen kan, biß endlich (vice verſa) [Poſt. 10.] B G ein Reſt, ſo kleiner alß E iſt, übrig bleibt. So wird geſchloßen, daß kein algemein Maaß E zu finden, und dahero A B gegen C D unermeßlich ſey.

Die 3. Propoſition.

Zu zweyen gegebenen ermeßlichen Großen A B und C D, ihr gröſtes algemeines Maaß D G zufinden.

Operatio.

Subtrahire C D von A B, den Reſt B E wieder von C D, den Reſt D G wieder von B E, und dis verwechſelt ſo offt, bis endlich ein Reſt D G einigen vorhergehenden Überſchuß B E mißet. Dieſemnach wird D G das algemeine gröſte Maaß zu A B und C D ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt des 7 Buchs 2 Propoſition gantz conform, denn was daſelbſt durch Zahlen geſchehen, wird hier durch Linien oder andere Größen proponirt und verſtanden. Dahero auch ſolches daſelbſt ſchon bewieſen.

Die 4. Propoſition.

Zu dreyen gegebenen ermeßlichen Größen A. B und C, ihr gröſtes algemeines Maaß D zufinden.

Operatio.

Suche erſtlich das allgemeine Maaß [3. 10] zu A und B/ welches iſt E. Denn ſuche es auf dergleichen Art auch zu C und E, ſo wird das kommende D das begehrte allgemeine Maaß zu A B und C ſeyn.

Beweiß.

Es iſt des 7. Buchs 3. Propoſ. und was dort in Zahlen/ hier dagegen in Linien zu verſtehen. Weiln nun der Beweiß daſelbſt in Zahlen allbereit geſchehen, ſo vermeine daß es unnöthig ſey, dis durch Linien hier noch einmahl zu verrichten, beſonders, da ſolches in Zahlen den Sinn weit deutlicher als durch Linien zufället.

Nota. Dahero auch ins künfftige, was ſtatt der Linien in Zahlen leichter zu beweiſen urtheile, alſo obſerviren, und dem Beweiß in Linien übergehen werde.

Die 5. Propoſition.

Ermeßliche Größen A und B haben gegen ein ander Proportion, gleich wie eine Zahl C zu der andern Zahl D hat.

Beweiß.

Man ſuche das allgemeine gröſte Maaß [3. 10] zu

zu A und B, dis ſey E, und mache alß ſo offt E in A begriffen, eben ſo viel mahl die Unitát in C enthalten.

Item, ſo offt E in B begriffen, auch eben ſo viel mahl die Unitát in D enthalten ſey. Dahero E in A und B ſo viel mahl enthalten, als die Unitát in C und D. Folglich iſt [20. def. 7] A zu B gleich wie die Zahl C zu der Zahl D.

In Zahlen.

A ſey √ 32. und B √ 18. das allgemeine gröſte Maaß iſt E √ 2.

Alſo iſt E in A √ 16. und in B √ 9. gleich der Zahl C 4 und D 3 enthalten.

Nota. Hier ſiehet man wiederum, wie deutlich der Beweiß in Zahlen, gegen deme in Linien ausfället, dahero die viele circumſcribirung durch Linien mehrmahln gantz unnöthig. Und wenn man der Wahrheit nur etwas beypflichtet, ſo iſt gewiß die proportion deren Linien, ſonder der Zahlen Beyhülffe genau zu penetriren, eine rechte obſcurität. Sage mir einer: Ob bey dieſer Propoſition A zu B ermeßlich, und E das allgemeine Maaß zu ſeyn, (ſonder auf die Zahlen zu gedencken, oder denen Linien in Zahlen nicht eine gewiſſe Gröſſe zuzueignen) dem Sinn nicht ziemlich dubieux fället. Bey ſubtilern Occaſionen derer ſo vielfältigen irrational Linien, gewiß noch mehr. Die proportion der Zahl 4. gegen der Zahl 3 iſt viel gewiſſer und

deutlicher, als die ermeßliche proportion A gegen B zu penetriren. Und ſo man denen Linien A und B einer ieden durch die Zahlen nicht eine gewiſſe Länge zu ſchriebe, bliebe ſolches ein vor allemahl, in ſpecie denen Incipienten, dunckel und zweiffelhafft. Durch die Zahlen wird auch bekand, daß dieſe 5. Propoſ. vorhergehenden 4ten Propoſition conform ſey.

Die 6. Propoſition.

Wenn 2. Größen A und B gegen einander proportionirt, als eine Zahl C zu einer andern Zahl D. So werden ſolche Größen A und B ermeßlich ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt vice verſa eben vorhergehende 5. Propoſition, und alſo damit ſchon bewieſen.

Die 7. Propoſition.

Unermeßliche (incommenſurable) Größen A und B haben gegen einander keine proportion, als eine Zahl zu einer andern Zahl.

Beweiß.

Dis iſt gar eine deutliche ſelbſt bekandte Sache. Weil alle Zahlen, auch wenigſtens prim Zahlen [12 def. 7.] durch die Unität zu meßen. Dahero können A und B keinen gemeinen Zahlen

len verglichen werden, anders würde ſelbige eine Zahl, und wenigſtens die Unität ausmeßen, ſeynd alſo und bleiben wie proponirt worden, unermeßlich.

Nota. In Zahlen könte zum Ex. A $\sqrt{8}$. und B $4-\sqrt{3}$ ſeyn. Und alſo unzehlige andere mehr.

Die 8. Propoſition.

Wenn zwey Größen A und B nicht gegen einander proportioniret, wie eine Zahl zu einer andern Zahl, So ſeynd ſolche Größen A und B unermeßlich. (incommenſurabel.

Beweiß.

Iſt vice verſa vorhergehende 7. Propoſition.

Die 9. Propoſition.

Die Quadrata auf rechte Linie A und B ſo ermeßlich in Länge, beſchrieben, ſeynd gegen einander proportionirt, als eine quadrat Zahl C zu einer quadrat Zahl D. Und alſo in Gegentheil die quadrata, welche proportionirt, wie eine quadrat Zahl zu einer andern quadrat Zahl, deren Seiten ſeynd ermeßlich in Länge. Ferner, die quadrata auf rechte Linien A und B, ſo unermeßlich in Länge beſchrieben, haben gegen einander keine Verhält-

nis, als eine quadrat Zahl C gegen einer quadrat Zahl D. Und alſo die quadrata, ſo keine Verhältnis gegen einander, als eine quadrat Zahl C gegen einer quadrat Zahl D, deren Seiten A und B ſeynd in Länge unermeßlich.

Beweiß.

1. Satz, es ſey zum Ex. A $\surd$80. und B $\surd$45. ſo iſt deren Verhältnis (durch ein allgemein Maaß $\surd$5. abmeßende) wie $\surd$16 gegen $\surd$9. welches 2 quadrat Zahlen. Dahero A $\surd$80 gegen B $\surd$45 = $\surd$16. gegen $\surd$9. Und die Seiten oder rechte Linien A und B, ſeynd in Länge ermeßlich, nemlich: wie 4. gegen 3.

2. Satz, iſt vice verſa vorhergehendes, da das quadrat auf A 80. gegen dem quadrat auf B 45. proportionirt, wie die quadrat Zahl C 16. gegen der quadrat Zahl D 9. daß dahero ihre Seiten A $\surd$80. und B $\surd$45. (communicantes) das iſt, in Länge ermeßlich, wie 4. gegen 3.

3. Satz, wenn A und B in Länge unermeßlich. Zum Exemp. A $\surd$80. und B $\surd$50 (nicht communicantes) ſo haben deren quadrata 80. und 50. keine proportion, als eine quadrat Zahl, zu einer andern quadrat Zahl.

4. Satz. Iſt vice verſa vorhergehendes, da die quadrata 80. zu 50. nicht proportionirt, als eine quadrat Zahl zu einer andern quadrat Zahl. Dahero auch die Seiten A $\surd$80. und B $\surd$50. in

in Länge unermeßlich (nicht communicantes) oder mit keinen allgemeinen Maaß zu quadrat Zahlen abzumeßen ſeynd.

Die 10. Propoſition.

Wenn 4. gleich proportionirte Gröſſen A. B. C. D. ſeynd, und die erſte A iſt mit der andern B ermeßlich, ſo wird auch die dritte C und vierte D ermeßlich ſeyn. Da aber A und B unermeßlich, ſo werden auch C und D unermeßlich ſeyn.

Beweiß.

1. Satz. Es ſey A 10. B. 18. C 5. und D 9. ſo in gleicher proportion, und A gegen B ermeßlich. Dahero auch [20. def. 7] C gegen D ermeßlich.

Oder aber A ſey $\sqrt{12}$. B $\sqrt{27}$. C $\sqrt{8}$. D $\sqrt{18}$ da A und B durch ein allgemein Maaß $\sqrt{3}$ ermeßlich wie 2 gegen 3. Alſo iſt auch C und D durch ein allgemein Maaß $\sqrt{2}$ ermeßlich wie 2 gegen 3.

2. Satz. Läſſet man aber ſeyn A $\sqrt{40} + 4$ B 8. C $\sqrt{10} + 2$ D. 4. ſo ſtehen ſolche 4. Gröſſen A. B. C. D. auch in gleicher proportion. Es iſt aber A $\sqrt{40} + 4$ gegen B 8 unermeßlich. Dahero iſt auch [20 def. 7] C $\sqrt{10} + 2$ gegen D 4. unermeßlich.

Die 11. Propoſition.

Zu einer gegebenen rechten Linie A

zwey andere rechte unermeßliche Linien B und C alſo zu finden: Daß die eine B nur allein in der der Länge, die andere C aber, in Länge und Macht gegen A unermeßlich ſey.

Erklärung.

1. Satz. Man laſſe gelten 2 Zahlen E 8 und F 6. die nicht gegen einander proportionirt, als eine quadrat Zahl zu einer andern quadrat Zahl. Man ſupponire ferner auf A und B in der Verhältnis E zu F, zwey quadrata zu machen.

Beweiß.

So wird die Seite A $\sqrt{8}$ und die Seite B $\sqrt{6}$ halten, und beyde [9. 10.] gegen einander allein in Länge unermeßlich, in Macht aber [3 def. 10.] ermeßlich seyn.

2. Satz. Suchet man nun [13. 6] zu A und B das medium proportionale C $\sqrt{\sqrt{48}}$. ſo wird dieſe C zu A [4. def. 10] ſowohl in Länge als Macht unermeßlich ſeyn.

Die 12. Propoſition.

Wenn 2. Gröſſen A und B iede beſonders gegen einer andern Gröſſe C ermeßlich, ſo werden auch A und B gegen einander ermeßlich ſeyn.

Erklärung und Beweiß.

Seynd A und C gegen einander ermeßlich, ſo werden ſelbige [5. 10.] gegen einander propor-

tio-

tionirt ſeyn, als etwa eine Zahl D zu einer Zahl E. Und alſo auch B zu C wie eine Zahl F zur Zahl E. Dieſe 3 Zahlen ſeynd dann unter ſich ſelbſt [1. 7] wenigſt durch die Unität ermeßlich, dahero auch A und B [2 ax. 10.] gegen einander ermeßlich.

Auf gleiche Art ſeynd auch A $\sqrt{128}$ B $\sqrt{72}$ C $\sqrt{50}$. Item A $\sqrt{48} + 4$. B $\sqrt{12} + 2$. C $\sqrt{3} + 1$ und alſo viel andere mehr, gegen einander ermeßlich.

Anhang.

Dahero eine iede rechte Linie, ſo zu einer rational Linie ermeßlich, die iſt auch rational. Und alle rechte rational Linien, ſeynd gegen einander ermeßlich, zum wenigſten in Macht.

Desgleichen eine jede Fläche, welcher zu einer rational Fläche ermeßlich, die iſt auch rational. Folglich ſeynd alle rational Flächen gegen einander ermeßlich.

Die Größen aber, deren die eine rational, und die andere irrational, ſeynd unter ſich incommenſurabel oder unermeßlich.

Die 13. Propoſition.

Wenn 2. Gröſſen A und B ſeynd, davon A gegen eine dritte C ermeßlich, B aber gegen ermelte dritte C unermeßlich. So werden auch A und B gegen einander unermeßlich ſeyn.

Erklärung und Beweiß.

Man ſetze daß A gegen B ermeßlich ſey. Da nun auch A gegen C ermeßlich geſetzet worden, ſo müſte [12. 10.] B gegen C auch ermeßlich ſeyn, welches aber wieder die Propoſition ſtreitet. Weil dahero B gegen C unermeßlich geſetzet worden, alſo iſt auch A gegen B unermeßlich.

Nota. Dieſen Beweiß in Linien, wäre einiger maſſen durch n Beweiß der Zahlen zu dubitiren.

Denn man laſſe gelten, daß A 8. B $\sqrt{48}$. und C 6 ſey. So iſt die Gröſſe oder Seite A gegen C in Länge ermeßlich, B gegen C aber in Länge unermeßlich. Dahero auch A und B gegen einander in Länge unermeßlich.

Und dieſes wäre nun der Propoſition, als auch dem Beweiß conform.

Allein man laſſe nochmahln ſeyn A $\sqrt{64}$ B $\sqrt{48}$. C $\sqrt{36}$. (welches gleich vorhergendes) ſo iſt klar, daß dieſe 3 Gröſſen in Macht in continuirlicher Proportion ſtehen, und von einen algemeinen Maß $\sqrt{8}$ in Macht können aus gemeßen werden, folglich alle 3 Größen A, B und C unter ſich ermeßlich, nicht aber unermeßlich ſeyn. Dahero dieſe 13. Propoſition mit Unterſcheid, und ſo wohl eines theils unermeßlich in Länge, als auch andern theils in Macht employret und verſtanden werden kan.

Dieſen Unterſcheid zeiget vorhergehende 11. Propoſition klärlich an.

Die

Die 14. Propoſition.

Wenn 2 Gröſſen A und B gegen einander ermeßlich ſeynd. Hingegen die eine davon A iſt gegen eine dritte C unermeßlich. So wird auch C gegen B unermeßlich ſeyn.

Dieſe Propoſition iſt vorhergehender conform, und nur in deme unterſchieden, daß was dort ermeßlich, hier unermeßlich proponiret wird.

Hingegen ebener maſſen zu zeigen, daſz ſolche Propoſition wiederum auf zweyerley Recht zu verſtehen.

So laſſe man gelten, A 8 und B $\sqrt{48}$. welche beyde dann gegen einander in Macht ermeßlich seyn. Hingegen ſey A gegen eine dritte C $\sqrt{27}$. in Länge unermeßlich.

Da nun hier A gegen C unermeßlich (auf eine wiedrige Art) geſetzet wird, ſo folgt hieraus nicht, daß B gegen C auch unermeßlich ſeyn müſte. In dem B $\sqrt{48}$. gegen C $\sqrt{27}$ allerdings, ja ſo gar in Länge und Macht ermeßlich wie 4 gegen 3.

Dahero dieſe 14 Propoſition wohl in ihren Werth verbleibet, und nur wie oben erwehnet auf zweyerley recht zuverſtehen.

nemlich etwa alſo:

Wenn 2 Gröſſen A und B gegen einander in Länge ermeßlich ſeynd. Hingegen die eine davon A iſt gegen eine Dritte C

in Länge unermeßlich. So wird auch C gegen B in Länge unermeßlich ſeyn.

Oder zweytens

Wenn 2 Gröſſen A und B gegen einander in Länge und Macht ermeßlich ſeyn. Hingegen die eine davon A iſt gegen eine dritte C in Länge und Macht unermeßlich. So wird auch C gegen B in Länge und Macht unermeßlich ſeyn.

Der Beweiß hierauff iſt aus vorhergehenden leicht zu verſtehen, und zu probiren.

Die 15. Propoſition.

Wenn 4. rechte Linien A B C und D in gleicher proportion. Und die erſte A vermag das quadrat E (einer rechten Linie die mit A in Länge ermeßlich iſt) mehr, als die andere B. So wird auch die dritte C das quadrat F (einer rechten Linie die mit C in Länge ermeßlich iſt) mehr Vermögen, als die vierte D. Da auch die erſte A das quadrat einer geraden Linie E (die mit ihr unermeßlich in Länge) mehr vermag als die andere B. So ſoll auch die dritte C das quadrat einer rechten Linie F (die mit ihr unermeßlich in Länge) mehr vermögen, denn die vierte D.

Be-

Beweiß.

Das quadrat A zum quadrat B iſt [22. 6] alß das quadrat C zum quadrat D.

Item, das □ B + □ E zum □ B [7. 5] wie das □ D + □ F zum □ D. Und bey Theilung, das □ E zum □ B [17. 5] wie das □ F zum □ D. Das iſt [22. 6] E zu B, wie F zu D.

Dieweiln aber A zu B, als C zu D, ſo wird auch ſeyn [11. 5.] A zu E, als C zu F.

Wenn nun A und E ermeßlich in Länge, ſo werden auch [10,10] C und F ermeßlich in Länge ſeyn.

In gegentheil, wenn A und E unermeßlich in Länge ſo werden auch [10. 10] C und F in Länge unermeßlich ſeyn.

In Zahlen.

Erſtlich, wenn A und E ermeßlich in Länge, laſſe man ſeyn A √18. B √10. C √72. D √40. So wird E √8. und F √32 halten.

Beweiß.

Die 4. rechte Linien A B C und D ſtehen in gleicher proportion √18. zu √10. als √72 zu √40.

Von □ A 18. das vermögende □ E 8 abgezogen, reſtirt das □ B 10. Dahero auch das □ C 72 das □ F 32 vermag, oder übertrifft das □ D 40.

Da auch A √18 mit E √8 ermeßlich in Länge, nemlich wie 3 gegen 2. So iſt auch C √72 und F √32. ermeßlich in Länge, wie 3 gegen 2.

Zum

Zum andern wenn A und E unermeßlich in Långe,

Laſſe man ſeyn: A $\sqrt{48}$. B $\sqrt{32}$. C $\sqrt{12}$. D $\sqrt{8}$. So wird E 4 und F 2 halten.

Beweiß.

Die 4 Linien A B C D ſtehen in gleicher proportion $\sqrt{48}$ zu $\sqrt{32}$. wie $\sqrt{12}$. zu $\sqrt{8}$.

Das □ A 48 übertrifft das □ B 32. oder vermag das □ E 16. Dahero auch das □ C 12 gegen dem □ D 8 das □ F 4 vermag oder übertrifft.

Da auch A $\sqrt{48}$ mit E 4 unermeßlich in Långe, ſo iſt auch C $\sqrt{12}$ mit F 2 unermeßlich in Långe.

Die 16. Propoſition.

Wenn 2 ermeßliche Grőßen A B und B C zuſammen geſetzt werden, ſo wird die gantze Grőße A C mit einer ieglichen A und B beſonders ermeßlich ſeyn. Da auch eine gantze Grőſſe A C mit einem ieden Theil derſelben A B und B C ermeßlich, ſo werden A B und B C auch gegen einander ermeßlich ſeyn.

Beweiß.

1. Satz. Man laſſe [3. 10] D $\sqrt{3}$ das algemeine grőſte Maaß zu A B $\sqrt{24}$ und B C $\sqrt{18}$ ſeyn. So wird hierdurch [2 ax. 10] auch A C gemeſſen $\sqrt{8} + \sqrt{6}$. Dahero iſt A C [6. 10] gegen A B und auch B C ermeßlich (in Macht hier zu verſtehen.)

2. Satz. iſt vice verſa vorhergehendes.

Die 17. Propoſition.

Wenn 2 unermeßliche (incommenſurable) Gröſſen A B und B C zuſammen geſetzet werden, ſo wird auch die gantze Gröſſe A C, zu ieglicher deren beyden A B und B C unermeßlich ſeyn. Da auch die Gantze A C gegen ieglichen derer beyden Theile A B und B C unermeßlich; ſo werden auch ſolche Theile A B und B C gegen einander unermeßlich ſeyn.

Beweiß.

Wenn es wäre, daß die zuſammen geſetzte A C ermeßlich, ſo ſey [3. 10] D das algemeine gröſte Maaß zu A B, und B C, dis D müſte nun auch [3 ax. 10] A C meßen. Were alſo A B gegen B C ermeßlich, ſo aber gegen die Propoſition ſtreitet.

In Zahlen.

Man laſſe A B $\sqrt{71}$ und B C 6 ſeyn. Dieſemnach iſt A C $\sqrt{71} + 6$. Welche dann ſämtlich [2 def. 10] gegen einander unermeßlich, zu welchen kein algemein Maaß kan gefunden werden.

Die 18. Propoſition.

Wenn 2 ungleich rechte Linien A B und C D ſeynd, und man die gröſſere A B in E alſo theilet: daß das rectangulum von

A E

A E und E B beſchloſſen gleich, dem vierten Theil des Qvadrats der kleinen Linie C D. auch A E und E B in Länge ermeßlich abgetheilet werden. So wird das Qvadrat A B gegen dem Qvadrat C D gröſſer ſeyn, umb das Qvadrat einer rechten Linie G E, ſo auch ermeßlich in Länge.

Und ſo das Qvadrat einer gröſſern rechten Linie A B gröſſer iſt, gegen dem Qvadrat einer kleinern Linie C D, umb ein Qvadrat G E, ſo mit vorhergehenden ermeßlich in Länge, und zugleich das rectangulum von A E und E B beſchloſſen, dem vierten Theil des Qvadrats der kleinern Linie C D austräget. So werden die Theile der gröſſern Linie, als nemlich A E und E B hierdurch in Länge ermeßlich abgetheilet werden.

Operatio.

Man theile C D in 2 gleiche Theile in H, und mache das rectangulum K B [28. 6] gleich dem Qvadrat von C H. Ferner A G von B bis E getragen, und das Qvadrat A F mit denen inwendigen Theilen formiret.

Beweiß.

1. Satz. das Qvadrat A F der Linie A B enthält [8. 2] 4 rectangula K B, deren iedes gleich dem Qvadrat von C H, ſämtlich aber gleich dem Qua-

Qvadrat von C D. Und bleibt übrig das Qvadrat von G E, nemlich das Qvadrat K L.

Iſt nun A E gegen E B ermeßlich in Länge, dahero auch [16. 10] A B. Und weil E B gleich A G, ſo wird der Reſt G E [3 ax. 10] in Länge auch ermeßlich ſeyn. So zu beweiſen war.

2. Satz. Iſt vice verſa vorhergehendes, und dieſem nach albereit bewieſen.

In Zahlen.

1. Satz. A B ſey √50 und C D √48. ſo wird C H √12 halten. Subtrahire das Qvadrat C D 48 von □ A B 50. reſtirt vor das Qvadrat K L 2. deſſen Seite G E alſo √2.

Weiter, G E √2. von A B √50 ſubtrahirt reſtirt √32. dis halbirt, giebt √8 vor A G ſo gleich E B. dis A G √8 von A B √50 ſubtrahirt reſtirt vor G B √18.

Beweiß.

G B ſo gleich A E √18. mit K G ſo gleich E B √8. multipl. giebt √144 oder 12 welches gleich dem Inhalt des Qvadrats C H

Ferner wie A E √18 gegen E B √8 in Länge ermeßlich: als 3 gegen 2. Alſo iſt A B √50 gegen G E √2 in Länge auch ermeßlich als 5 gegen 1.

2. Satz. iſt vice verſa vorhergehendes, und alſo nunmehro leicht nach zu rechnen.

Die 19. Propoſition.

Wenn 2 ungleich rechte Linien A B

und C D ſeynd, und man die gröſſere in E alſo theilet: Daß das von beyden Theilen A E und E B beſchloſſene rectangulum, gleich dem vierten Theil des Quadrats der kleinern Linie C D, auch A E, und E B in Länge unermeßlich abgetheilet werden. So iſt das Quadrat A B gegen dem Quadrat C D gröſſer umb das Quadrat G E. Es wird auch die Seite G E ſolchen Quadrats in Länge unermeßlich ſeyn.

Und ſo das Quadrat einer gröſſern rechten Linie A B gröſſer iſt, gegen dem Quadrat einer kleinern rechten Linie C D, um ein Quadrat G E, deſſen Seite (G E) mit vorhergehender (A B) in Länge unermeßlich. Und man von der getheilten Linie A B, ihren beyden Theilen A E und E B, ein rectangulum, gleich dem Vierten Theil des Quadrats C D machet. So werden die Theile A E und E B, in Länge auch unermeßlich ſeyn.

Erklärung.

Dieſe 19. Prop. iſt vorhergehender 18. Propoſition gantz conform, und nur in dem unterſchieden, daß wenn A E und E B bey der Zertheilung in Länge unermeßlich abgetheilt, ſo dann G E auch in Länge unermeßlich ſeyn werde.

Be-

Beweiß.

Weil AG gleich EB, und AE wie auch EB vermöge der Propoſition in Länge unermeßlich: So wird auch (von AE) das Theil GE [17. 10.] in Länge unermeßlich ſeyn.

In Zahlen.

Es ſey AB 20. CD 18. ſo komt vor AE 10. + √ 19. dann EB 10 ÷ √ 19. Und GE √ 76. Dahero wie AB 20 gegen GE √ 76. in Länge unermeßlich: Alſo iſt auch AE 10 + √. 19. gegen EB 10 — √ 19. in Länge unermeßlich.

Die Berechnung AE, EB und GE, geſchiehet alſo:

Von Quadrat AB 400. ſubtrah. das Quadrat CD 324 reſtirt 76. vor das Quadrat KL, deſſen Seite GE √ 76.

Dis GE √ 76. von AB ſubtrah. reſtirt 20. — √ 76. dis halbirt giebt 10 — √ 19 vor AG oder EB, zu GE √ 76 addire [pag. 37.] AG 10. — √ 19. bringt 10 + √ 19 vor AE.

Die 20. Propoſition.

Das rectangulum ABCD, ſo von rational rechten Linien AD und CD, welche in Länge ermeßlich, nach einer der vorhergeſagten Arten, beſchloſſen wird, iſt ein rectangulum rationale.

Beweiß.

Man supponire die Linie GH rational, und beſchreibe auf CD das Quadrat CDEF. Da

nun [1. 6.] AD zu DE (ſo gleich DC) wie AC zu DF. Und AD ermeßlich zu DC, ſo wird auch [9. def. 10.] das rectangulum AC zum Quadrat DF ermeßlich ſeyn. Auf ſolche Art iſt wiederum das Quadrat DF ermeßlich gegen dem Quadrat von GH, und endlich [12. 10] AC ermeßlich gegen dem Quadrat von GH. Und dahero AC ein rectangulum rationale.

In Zahlen.

Hier iſt der Beweiß weit deutlicher als durch Linien zuverſtehen nemlich:

Zum Ex. ſollen ſeyn, beyde in Länge ermeßliche Linien. AD $\sqrt{27}$. und CD $\sqrt{12}$. dieſemnach thut das rectangulum AC $\sqrt{324}$. gleich 18. und alſo ein rationale.

Die 21. Propoſition.

Ein rational rectangulum ABCD an eine rational Linie CD gefüget, machet die Breite AD rational, und gegen DC in Länge ermeßlich.

Beweiß.

Dis iſt eben vorhergehende 20. Propoſition, nur vice verſa in veränderten Vortrag, und alſo durch voriges ſchon bewieſen.

Jedoch dis zu wiederholen.

In Zahlen.

Sey das rational rectangulum ABCD von Inhalt 105. an die rational-Linie CD 9 gefüget, ſol-

ſolches machet die Breite AD rational nemlich $11\frac{2}{3}$. und gegen DC in Länge ermeßlich.

Die 22. Propoſition.

Das rectangulum ABCD beſchloſſen, von zweyen rechten Linien AD und AB, ſo nur allein in Macht ermeßlich ſeyn, iſt irrational. Und die rechte Linie G ſo das rectangulum vermag, oder in Macht ausmiſſet, iſt auch irrational, und wird die Mittel-Linie (media) genennet.

Erklärung und Beweiß.

Man laſſe gelten oder ſeyn AB 4. und AD $\surd$ 20. ſo komt des rectanguli BD Inhalt $\surd$ 320. Folglich die rechte Linie oder Seite G (als die Seite eines Quadrats, ſo dem rectang. BD an Inhalt gleich) $\surd\surd$ 320. Dieſemnach iſt das rectangulum BD $\surd$ 320. [2. def. 10.] irrational und unermeßlich. Noch weniger aber wird [4. def. 10.] die Linie G $\surd\surd$ 320. (als das medium proportionale zwiſchen AB und AD) ermeßlich, ſondern ebenermaſſen irrational ſeyn.

Anhang.

Nota, dergleichen Mittel-Linie (Media) iſt alſo künfftighin allezeit irrational zuverſtehen. Und muß mit der Mitlern gleich-verhaltenden oder dem Medio proportionale [13.6.] nicht confundiret werden. Umb welcher Urſach willen eben, albereit vorherbefindliche 14. Anmerckungen

voran geſtellet worden. Man kan hier die 1 Anmerckung mit in Betrachtung ziehen.

Die 23. Propoſition.

Wenn an eine rational gerade Linie AB das Quadrat der Mittel-Linie (media) CD gebracht, und dadurch das rectangulum ABEF formiret worden. So wird die Breite oder Seite BE, mit AB in Länge unermeßlich ſeyn.

Erklärung.

Es iſt eben vorhergehende 22 Propoſition, und nur in Vortrag verändert. Der Beweiß kan dahero gleich vorigen, durch Zahlen alſo geſchehen.

Beweiß.

Die rational Linie AB ſey 4. Die Mittel-Linie (media) CD $\sqrt{\sqrt{320}}$. dieſemnach wird BE $\sqrt{20}$ ſeyn.

Iſt alſo AB 4 mit BE $\sqrt{20}$ wohl in Macht ermeßlich. Hingegen aber in Länge unermeßlich So zubeweiſen war.

Nota, Es kan hier auch alſo geſchloſſen oder geſaget werden. Man ſoll auf- oder an die Seite AB 4. ein rectangulum machen, ſo mit einem Quadrat (deſſen Seite hier CD $\sqrt{\sqrt{320}}$.) gleiches Inhalts ſey.

Die 24. Propoſition.

So eine Mittel-Linie (media) B, eine andere Linie D miſſet. So wird D auch eine Mittel-Linie (media) ſeyn.

Er-

Erklärung und Beweiß.

Man applicire an die rational Linie A C [28. 6] das rectangulum A C G H gleich dem Qvadrat von B, ingleichen das rectangulum A C E F gleich dem Qvadrat von D.

Weiln nun [Prop.] beyde rectangula A E und A G Mittel-Flächen, und A C rational, ſo wird A F gegen A C [23. 10] in Länge unermeßlich ſeyn.

Da ſich nun das rectangulum A E zu A G [1. 6] verhält, wie A F zu A H, und A E miſſet A G, ſo wird [10. 10] A F ermeßlich zu A H.

Da nun albereit erwieſen, daß [23. 10] A F gegen A C in Länge unermeßlich, ſo wird auch [12 & 13. 10] A H gegen A C unermeßlich ſeyn.

Dieſemnach iſt [22. 10] das rectang. A C E F (ſo gleich dem Qvadrat von D) ein rectang. Medium, folglich D eine Mittel-Linie. So zu beweiſen war.

Nota, dieſer Beweiß in Linien, were zu dubitiren. Denn es iſt möglich, daß eine Mittel-Linie (media) B zum Ex. $\sqrt{\sqrt{240}}$ durch eine andere Linie D zum Ex. $\sqrt{20}$ (ob wohl nur in Macht) auszumeſſen, und dennoch iſt D $\sqrt{20}$. keine Mittel-Linie.

Hiervon wird künfftig ein mehrers folgen, voritzo will nur ſo viel ſagen, daß man wiederum hier deutlich genug ſehen kan, wie behutſam mit dem Beweiß in Linien, bey irrational Qvantitæten zu verfahren.

Die 25. Propoſition.

Das rectangulum ABCD, von zwey-en Mittel-Linien AB und BC (ſo ermeß-lich in Länge) beſchloſſen. Iſt ein rectan-gulum Medium oder Mittel-Fläche.

Erklärung und Beweiß.

Man laſſe die beyde in Länge ermeßliche Mit-tel-Linien ſeyn AB √√486 und BC √√96 (welche beyde durch das algemeine Maaß √√6 auszumeſſen) alſo in Länge ermeßlich ſeyn, wie 3 gegen 2. Dieſe beyde Seiten oder Linien nun, in einander multipl. bringt √√466,6 gleich √216 ſo [2 Anmerck. 10] medialiſch. Dahero das rectangulum ABCD eine Mittel-Fläche.

Hierüber iſt vorhergehende 2 Anmerckung mit in Betrachtung zu ziehen.

Die 26. Propoſition.

Ein rectangulum von zweyen Mittel-Linien CD und CF (die allein ermeßlich in Macht) beſchloſſen. Iſt entweder ein rational rectangulum, oder ein rectan-gulum Medium (Mittel-Fläche.)

Erklärung und Beweiß.

1. Saz. Man nehme zwey Mittel-Linien CD √√18. und CF √√72, ſo nur allein in Macht ermeßlich. Dieſe beſchlieſſen dann ein rectangu-

lum

lum Medium $\sqrt{}\sqrt{}$ 1296 = $\sqrt{}$ 36. = 6. alſo ein rational rectangulum.

2. Satz Man nehme wieder zwey in Macht allein ermeßliche Mittel-Linien CD $\sqrt{}\sqrt{}$ 24 und CF $\sqrt{}\sqrt{}$ 600. Dieſe beyde Mittel-Linien in einander multiplicirt, bringt $\sqrt{}\sqrt{}$ 14400 ſo gleich $\sqrt{}$ 120. alſo ein rectangulum Medium oder Mittel-Fläche.

Nota, wie dieſe Zahlen oder Linien zu denen verlangten Flächen zufinden, wird durch folgende 28 und 29. Prop. ausführlich abgehandelt.

Die 27. Propoſition.

Ein rectangulum Medium AB übertrifft, oder gehet kein rectangulum Medium AC, mit einer rational-Fläche DB vor.

Erklärung.

Es iſt ſo viel geſagt! Wenn ein rectangulum Medium AB verhanden, und man in ſolchen eine rational-Fläche DB machete oder einſchriebe, daß das übertreffende rectangulum AC ſo dann niemaln ein rectangulum Medium ſeyn könne.

Beweiß in Zahlen.

Man laſſe AL 2. und LB $\sqrt{}$ 192. ſeyn, ſo iſt das rectangulum AB $\sqrt{}$ 768. [22. 10.] ein rectangulum Medium.

1. Satz. Mit dem rationale, ſey CB 4. und CD iſt gleich AL 2. Dahero DB 8 ein rationale. Hingegen aber bleibt vor AC $\sqrt{}$ 768. − 8. wel-

ches vor keine übertreffende Mittel-Fläche [25. 10. und 2. Anmerck. 10.] paſſiren kan.

In Gegentheil.

2. Satz. Mit dem rationale, ſey CB √ 12. und CD iſt gleich AL 2. Dahero DB √ 48. ein rectang. Medium. Dis von AB √ 768. ſubtrah. reſtirt oder übertrifft AC √ 432. welches ein rectang. Medium.

Anhang.

1. Dahero wird allezeit ein rationale AB ein ander rationale DB [3 ax. 1.] mit einem rationale AC übertreffen.

2. Folglich ein rectang. Medium AB einander rectang. DB [3 ax. 1.] mit einem rectang. Medio AC übertreffen.

Die 28. Propoſition.

Zwey (Media) Mittel-Linien AB und AC zufinden, welche ein rational rectangulum Medium ABCD beſchlieſſen.

Operatio.

Man nehme E und F [11. 10.] allein ermeßlich in Macht, und ſuche [13. 6.] das Medium proportionale zwiſchen E und F, komt AB. Dann mache wie E zu F, alſo AB zu AC, ſo werden AB und AC, das begehrte rectangulum medium rationale abgeben.

Erklärung in Zahlen.

Es ſey E √ 3. F √ 6. kommt AB √√ 18.

AC

AC √√ 72. vor die begehrten 2. Mittel-Linien. Oder in verlangter Ordnung, wie √ 3 zu √√ 18 alſo √ 6 zu √√ 72.

Beweiß.

Des Rectanguli ABDC, Inhalt beträgt √√ 1296 = √ 36 = 6. alſo [26. 10.] ein rationale.

Die 29. Propoſition.

Zwey (Media) Mittel-Linien D und E, ſo allein in Macht ermeßlich alſo zu finden, daß ſelbige ein Rectangulum Medium beſchlieſſen.

Operatio.

Man nehme 3. Linien [11. 10.] A, B und C, die gegen einander allein in Macht ermeßlich, und ſuche zwiſchen A und B, das Medium proportionale D. Ferner wie B zu C, alſo mache D zu E, ſo werden D und E die begehrten Mittel-Linien ſeyn.

Beweiß.

Weil A und B gegen einander allein in Macht ermeßlich, ſo wird [22. 10.] nicht allein D, ſondern auch wegen gleicher Verhältniß E eine Mittel-Linie, und folglich das von beyden D und E beſchloſſene Rectang. [26. 10.] ein Rectangulum Medium ſeyn.

In Zahlen.

Es ſey A √ 30. B √ 20. C √ 5. Dieſem nach komt D √√ 600. und E √√ $37\frac{1}{2}$. als 2. Mit-

Mittel-Linien, ſo gegen einander allein in Macht ermeßlich, und [2. Anmerck. 10.] ein Rectangulum Medium √150. beſchlieſſen.

Die 30. Propoſition.

Zwey rechte Linien AB, und AC, allein ermeßlich in Macht, alſo zu finden. Das die gröſſere AB mehr vermag (an Inhalt mehr austräget,) als die kleinere AC, nehmlich: ein Quadrat der rechten Linie BC, welche BC, mit AB in Länge ermeßlich ſey.

Operatio.

Man laſſe AB eine rational-Linie ſeyn, und mache darauff dem halben Circul-Bogen. Nim̃ ſo dann CB rational alſo: Daß AC keine Quadrat-Zahl übrig bleibe.

Erklärung in Zahlen.

AB ſey 10. Nimm dann CB rational 3. ſo wird AC √91. und alſo keine Quadrat-Zahl übrig bleiben.

Beweiß.

AB 10 und AC √91. ſeynd [3. Def. 10.] allein in Macht ermeßlich: Und das Quadrat AB 100. iſt gröſſer umb das Quadrat BC 9. deſſen Seite gleich 3. ſo mit AB 10. ermeßlich in Länge.

Die 31. Propoſition.

Zwey rechte Linien AB und AC, in Macht

Macht allein ermeßlich, alſo zu finden. Daß die gröſſere AB mehr vermag, als die kleinere AC, nehmlich das Quadrat BC, welche BC, gegen AB in Länge unermeßlich ſey.

Operatio.

Diß iſt mit vorhergehender Propoſition nur in deme unterſchieden, daß weder CB, noch AC ein rational-Quadrat ſey.

Erklärung.

Man nehme wieder AB rational 10. und dann nach Gefallen AC $\surd$ 88. ſo kommt CB $\surd$ 12.

Beweiß.

Dieſem nach iſt AB 10. gegen AC $\surd$ 88. in Macht ermeßlich. Und BC $\surd$ 12. iſt gegen AB 10. in Länge unermeßlich. So zu beweiſen war.

Die 32. Propoſition.

Zwey (Media) Mittel-Linien AE und EF, ſo gegen einander allein in Macht ermeßlich, und ein rectang rationale beſchlieſſen, alſo zu finden. Daß die gröſte AE ein Quadrat (deſſen Seite mit dieſer AE in Länge ermeßlich,) mehr vermag, als die kleinere EF.

Erklärung.

Man ſuche oder neyme 2. gegen einander al-

allein in Macht ermeßliche Linien alſo: Daß [30. 10.] die gröſſere AC 8. ein Quadrat (deſſen Seite mit der gröſſern in Länge ermeßlich ſey,) mehr vermag, als die kleinere CD √48. Nun ſuche zwiſchen AC 8. und CD √48. [13.6.] das Medium proportionale BC √√3072. Ferner mache wie AC 8 gegen CD √48. alſo AE √√ 3072. (welches = BC) zu EF √√1728. Dieſemnach werden AE √√3072 und EF √√ 1728. die beyden begehrten (Media) Mittel-Linien, und gegen einander in Macht ermeßlich ſeyn. Zugleich aber auch ein Rectang. rationale beſchlieſſen.

Beweiß.

AE √√3072. mit EF √√1728. multiplicirt, bringt √√5308416 = √2304 = 48. alſo ein Rectang. rationale. Und die gröſſere AE, übertrifft die kleinere EF mit einem Quadrat √192. Deſſen Seite √√192. mit der Seite AE √√3072. in Länge ermeßlich, nemlich wie 1. gegen 2.

Die 33. Propoſition.

Zwey (Media) Mittel-Linien BC, und BF, (ſo gegen einander allein in Macht ermeßlich, und ein Rectangulum Medium beſchlieſſen,) alſo zu finden. Daß die gröſſere BC, ein Quadrat (deſſen Seite mit dieſer BC in Länge ermeß-

meßlich) mehr vermag, als die kleinere BF.

Erklärung.

Es iſt eben vorhergehende 32. Propoſition, und nur in dem unterſchieden, daß dort die beyden Media ein Rectangulum rationale, hier aber dafür ein Rectangulum Medium beſchlieſſen ſollen.

Operatio.

Man ſuche demnach oder nehme [30. 10.] 3. gegen einander allein in Macht ermeßliche Linien AC 8. CD √48. und AE √28. alſo: Daß die gröſſere AC 8. gegen iede der andern beyde beſondern, ie ein Quadrat (deſſen Seite mit dieſer gröſſern AC in Länge ermeßlich,) mehr vermag. Ferner ſuche zu AC 8. und CD √48. das Medium proportionale BC √√3072. Dann mache

wie AC	zu AE	alſo BC zu BF.
8	√28	√√3072.

komt √√588. vor BF.

Dieſemnach, ſeynd BC √√3072. und BF √√588. die beyden verlangten Mittel-Linien.

Beweiß.

Beyde BC √√3072. und BF √√588. ineinander multiplicirt, giebt √√1866336. = √1344. ein Rectang. Medium. Ingleichen das Quadrat BF √588. von Quadrat

BC

BC √ 3072. ſubtrahirt, reſtiret √ 972. deſſen Quadrat-Wurtzel oder Seite √√ 972. iſt mit BC √√ 3072. in Länge ermeßlich/ wie 3. gegen 4.

Die 34. Propoſition.

Zwey rechte Linien AB und BC, unermeßlich in Macht (incommenſurabel) alſo zu finden. Deren Quadrata zuſammen addirt, eine rational-Fläche abgeben, ingleichen: Daß das von beyden AB und BC, beſchloſſene Rectangulum, ein Rectangulum Medium ſey.

Operatio.

Man nehme 2. Linien allein in Macht ermeßlich, als [31. 10.] AC, und DE, (da das Quadrat AC gröſſer, gegen dem Quadrat DE, umb ein Quadrat, deſſen Seite mit AC in Länge ermeßlich,) theile DE halb in F, ziehe auf AC den halben Circul-Bogen, und mache [28. 6.] das Rectangulum AG mit GC, gleich dem Quadrat DF. So wird die in G geſtellte Perpendicular-Linie GB, die beyden begehrten Linien AB, und BC anzeigen.

Erklärung in Zahlen.

Es ſey AC 8. und DE √ 40. So iſt DF √ 10. dieſem nach kommt AG 4 + √ 6. und GC 4 − √ 6. Ferner AB √: 32 + √ 384. und BC √: 32 − √ 384.

Be-

Beweiß.

AB $\sqrt{:32+\sqrt{384}}$. und BC $\sqrt{:32-\sqrt{384}}$. ſeynd gegeneinander unermeßlich.

Derer Quadrata $32+\sqrt{384}$. und $32-\sqrt{384}$. zuſammen addirt, bringt 64. welches eine rational-Fläche.

Endlich AB mit BC multiplicirt, giebt $\sqrt{640}$: ſo [26. 10.] ein Rectang. Medium iſt.

Nota, die AG und GC, dann AB, ingleichen BC, werden alſo berechnet.

HB iſt = AH 4. von deſſen Quadrat 16. ſubtrahire das Quadrat BG 10. reſtirt das Quadrat HG 6. id eſt die Seite HG $\sqrt{6}$. Dahero AG $4+\sqrt{6}$.

HG iſt 4. davon ſubtrahire HG $\sqrt{6}$. giebt vor GC $4-\sqrt{6}$.

Ferner AG $4+\sqrt{6}$. quadrirt, bringt $22+\sqrt{384}$. hierzu addire das Quadrat BG 10: giebt $32+\sqrt{384}$. hieraus rad. quadrat extrahirt, thut $\sqrt{32+\sqrt{384}}$. vor AB. Endlich GC $4-\sqrt{6}$. auch quadrirt, bringt $22-\sqrt{384}$. hierzu das Quadrat BG addirt, und rad. quadrat extrahirt, thut $\sqrt{:32-\sqrt{384}}$. vor BC.

Die 35. Propoſition.

Zwey rechte Linien AB und BC, unermeßlich in Macht alſo zu finden. Daß deren addirte Quadrata ein Rectang. Medium, ingleichen das von ihnen begriffene Rectangulum, rational ſey.

Operatio.

Man nehme 2. (Media) Mittel-Linien [32. 10.] AC und DE, ſo allein in Macht ermeßlich, und ein rational-Rectangulum beſchlieſſen, auch daß das Quadrat AC, das Quadrat DE, umb ein Quadrat übertreffe, deſſen Seite mit AC, in Länge unermeßlich. Und procedire ferner, gleich wie bey vorhergehender 34. Propoſition, ſo werden AB und BC, die begehrte rechte Linien ſeyn.

Erklärung und Beweiß.

Gleich wie die Operation vorhergehender 32. und 34. Propoſition in allen conform, alſo iſt auch der Beweiß mit ſelbigen einerley, iedoch diß zu-wiederholen

Durch Zahlen.

So ſey AC $\surd\surd\, 216$. und DE $\surd\surd\, 96$. Dieſemnach iſt HB, ſo gleich AH $\surd\surd\, 13\frac{1}{2}$ von deſſen Quadrat $\surd\, 13\frac{1}{2}$ ſubtrahire das Quadrat BG $\surd\, 6$. reſtirt vor das Quadrat HG $\surd\, 1\frac{1}{2}$ id eſt die Seite HG $\surd\surd\, 1\frac{1}{2}$. Dahero AG $\surd\surd\, 13\frac{1}{2}$. + $\surd\surd\, 1\frac{1}{2}$. Von HC $\surd\surd\, 13\frac{1}{2}$. ſubtr. HG $\surd\surd\, 1\frac{1}{2}$, dis giebt vor GC $\surd\surd\, 13\frac{1}{2} - \surd\surd\, 1\frac{1}{2}$.

Ferner AG $\surd\surd\, 13\frac{1}{2} + \surd\surd\, 1\frac{1}{2}$ quadirt, bringt $\surd\, 24 + \surd\, 18$. Hierzu addire das Quadrat BG $\surd\, 6$. komt $\surd\, 54. + \surd\, 18$. deſſen Quadrat-Wurtzel $\surd : \surd\, 54 + \surd\, 18$. giebt die eine begehrte Linie AB.

Auf ſolche Art wird auch berechnet, das Quadrat

drat BC $\surd$ 54 — $\surd$ 18. Da folglich die andere begehrte Linie BC $\surd$: $\surd$ 54 — $\surd$ 18. Nemlich

1. Seynd ſolche beyde Linien A B und B C, in Vermögen unermeßlich.

2. Beſchlieſſen ſelbige in einander mult. eine rational-Fläche 6.

3. Und ihre Quadrata zuſammen addirt, betragen $\surd$ 216. ſo ein rect. Medium.

Die 36. Propoſition.

Zwey rechte Linien A B und BC, ſo in Länge und Macht unermeßlich, alſo zufinden. Daß deren zuſammen addirte Quadrata ein rectang. Medium. Wie auch die von beyden Linien beſchloſſene recht winckliche Figur, ein rectangulum Medium, und zugleich mit vorher erwehnten addirten Quadraten, unermeßlich ſey.

Operatio.

Man nehme [33. 10.] 2. Medial-Linien AC und DE, ſo nur allein in Macht ermeßlich ſeyn, die ein rectangulum Medium beſchlieſſen, und die gröſſere AC, gegen der kleinern DE, ein Quadrat, deſſen Seite mit A C ermeßlich, mehr vermag. Und alſo ferner vorheriger 33. 34. und 35. Propoſition gemäß weiter procedirende. So werden AB und BC die begehrten Linien ſeyn.

Erklärung und Beweiß durch Zahlen.

Es ſey AC $\sqrt{\sqrt{72}}$ und DE $\sqrt{\sqrt{8}}$.

Iſt alſo HB, ſo gleich AH oder HB $\sqrt{\sqrt{4\frac{1}{2}}}$. Von deſſen Quadrat $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ ſubtrahire das Quadrat BG (oder halb DE) $\sqrt{\frac{1}{2}}$. reſtirt vor das Quadrat HG $\sqrt{2}$ Dahero iſt die Seite HG $\sqrt{\sqrt{2}}$. Folglich die Seite AG $\sqrt{\sqrt{4\frac{1}{2}}} + \sqrt{\sqrt{2}}$. Von HC $\sqrt{\sqrt{4\frac{1}{2}}}$ ſubtr. HG $\sqrt{\sqrt{2}}$. giebt GC $\sqrt{\sqrt{4\frac{1}{2}}} - \sqrt{\sqrt{2}}$.

Ferner AG quadrirt, bringt $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{12}$. hierzu das Quadrat BG $\sqrt{\frac{1}{2}}$. addirt, komt $\sqrt{18} + \sqrt{12}$. Deſſen Quadrat Wurtzel $\sqrt{:\sqrt{18} + \sqrt{12}}$. bringt die eine begehrte Linie AB. Und alſo mit dergleichen Berechnung auch die andere begehrte Linie BC $\sqrt{:\sqrt{18} - \sqrt{12}}$.

Nemlich:

1. Seynd AB und BC in Länge und Macht unermeßlich.

2. Das daraus entſtehende rectangulum beträgt $\sqrt{6}$. alſo ein rectang. Medium.

3. Und deren zuſammen addirte Quadrata geben $\sqrt{72}$. ſo auch Medial, und mit itzt erwehnten rectang. unmeßlich (in Länge zu verſtehen)

Die 37. Propoſition.

Wenn zwey rational Linien AB und BC, welche allein in Macht ermeßlich, zuſammen gefügt oder addirt werden. So wird die daraus entſtehende gantze Linie AC irrational oder unermeßlich, und ein Binomium (das iſt Eine zweynahmige Linie) genennet.

Opera-

Operatio.

AB ſey $\sqrt{50}$. und BC 6. komt alſo AC $\sqrt{50}$. + 6 ein Binomium.

Erklärung und Beweiß.

Weiln vermöge der Propoſ. AB $\sqrt{50}$. gegen BC 6. unermeßlich, ſo folgt [17. 10.] daß wie AC $\sqrt{50} + 6$ [2. def 10.] gegen AB $\sqrt{50}$. und dann auch gegen BC 6. unermeßlich. Alſo auch vice verſa AB $\sqrt{50}$. und BC 6. gegen AC $\sqrt{50}$. + 6. unermeßlich ſeyn müſſe.

Man beſehe hierüber zugleich mit, vorhergehende 3te Anmerckung.

Die 38. Propoſition.

Wenn zwey Mittel-Linien AB und BC, welche in Macht allein ermeßlich, und die ein rational rectangulum beſchlieſſen, zuſammen addirt werden. So wird die gantze Linie AC irrational ſeyn, und genennet, die Erſte bimedial Linie.

Operatio.

Formire oder ſetze zuſammen (28. 10.) die beyden Mittel-Linien AB $\sqrt{\sqrt{72}}$. und BC $\sqrt{\sqrt{18}}$ ſo iſt AC $\sqrt{\sqrt{72}} + \sqrt{\sqrt{18}}$. die begehrte Erſte bimedial-Linie.

Erklärung und Beweiß.

AB $\sqrt{\sqrt{72}}$ und BC $\sqrt{\sqrt{18}}$ in einander multiplicirt, bringt zum Inhalt 6. alſo ein rational rectangulum. Ferner auch beyde AB und

BC addirt $\sqrt{}\sqrt{}72 + \sqrt{}\sqrt{}18$ eine irrational, und [4 Anmerckung 10] Erſte bimedial Linie AC.

Die 39. Propoſition.

Zwey Mittel-Linien AB und BD, ſo allein in Macht ermeßlich, und welche zugleich ein rectangulum Medium beſchlieſſen, zuſammen addirt. Wird die gantze Linie AD irrational, und genennet, die zweyte bimedial Linie.

Operatio.

Formire oder ſetze zuſammen [29. 10] die beyde Mittel-Linien AB $\sqrt{}\sqrt{}600$. und BD $\sqrt{}\sqrt{}24$. ſo iſt AD $\sqrt{}\sqrt{}600 + \sqrt{}\sqrt{}24$.

Erklärung und Beweiß.

AB $\sqrt{}\sqrt{}600$ und BD $\sqrt{}\sqrt{}24$. in einander multiplicirt, giebt Inhalt $\sqrt{}120$. ein rectang. Medium. Ferner auch addirt, $\sqrt{}\sqrt{}600 + \sqrt{}\sqrt{}24$.] eine irrational. und [5 Anmerckung 10.] zweyte bimedial Linie.

Die 40. Propoſition.

Wenn 2 rechte in Macht unermeßliche Linien oder Zahlen EF und FG, deren addirte quadrate eine rational Fläche, ingleichen das von ſelbigen beſchloſſene rectangulum ein rectang. Medium ſey, zuſammen geſetzt werden. So wird dieſe zuſammen gebrachte Linie EG irrational, und genennet Major oder Groſſe Linie.

Ope-

Operatio.

Man erwehle [34. 10] 2 in Macht incommenſurable Linien, EF $\sqrt{:6+\sqrt{10}}$ und FG $\sqrt{:6-\sqrt{10}}$. deren addirte quadrate rational, und das von beyden Linien EF und FG beſchloſſene rectangulum ein rectangulum medium ſey. So wird die zuſammen gebrachte Linie EG $\sqrt{:6+\sqrt{10}}+\sqrt{6-\sqrt{10}}$ irrational, und Major, oder der Benennung nach, die Groſſe seyn.

Erklärung und Beweiß.

Beyde Quadrata von EF, und FG, thun an Inhalt $6+\sqrt{10}$ und $6-\sqrt{10}$. alſo zuſammen addirt 12. ſo rational. Und das von EF und FG beſchloſſene rectangulum enthält $\sqrt{26}$. welches ein rectang. Medium. Und endlich iſt EG $\sqrt{:6+\sqrt{10}}+\sqrt{:6-\sqrt{10}}$. irrational, nnd [6. Anmerckung 10.] eine Linie Major oder Groſſe Linie.

Die 41. Propoſition.

Wenn 2 rechte Linien AB und BE, (welche in Macht incommenſurabel, und deren zuſammen addirte quadrate ein rectangulum medium, ingleichen das von ihnen beſchloſſene rectangulum eine rational Fläche ausmachet) zuſammen gebracht werden. So wird die gantze Linie AE irrational ſeyn. Man nennet dergleichen Linie (media potens) eine in Macht ermeßliche Mittel-Linie.

Operatio.

Man erwehle [35. 10.] 2 in Macht unermeßliche Linien AB $\surd : \surd 54 + \surd 18$. und BE $\surd : \surd 54 - \surd 18$. von ſolcher Eigenſchafft (da deren zuſammen addirte Quadrata ein rect. Medium, ingleichen das davon beſchloſſene rectangulum, rational ſey.) So wird die gantze Linie AE $\surd : \surd 54 + \surd 18 + \surd : \surd 54 - \surd 18$. irrational seyn, und genennet (media potens) eine in Macht ermeßliche Mittel-Linie.

Erklärung und Beweiß.

Beyde Quadrate von AB und BE halten $\surd 54 + \surd 18$ und $\surd 54 - \surd 18$. alſo zuſammen $\surd 216$. ſo ein rectang. Medium. Und das von AB und BE beſchloſſene rectang. thut 6. welches rational. Dann iſt die gantze Linie AE $\surd : \surd 54 + \surd 18 + \surd : \surd 54 - \surd 18$. irrational, und [7 Anmerck. 10.] eine in Macht ermeßliche Mittel-Linie.

Die 42. Propoſition.

Wenn 2 rechte Linien AB, und BC, (die unermeßlich in Macht, und deren addirte quadrata, ein rectang. Medium ausmachen, auch das von ihnen beſchloſſene rectangulum, ein rectangulum Medium ſey, ſo gegen denen zuſammen addirten Quadraten incommenſurabel) zuſammen gebracht werden. So iſt dieſe zuſammen gebrachte gantze Linie AC irrational,

nal, und wird genennet (bina media potens,) eine doppelte in Macht ermeßliche Mittel-Linie.

Operatio.

Man nehme [36 10] zwey in Macht unermeßliche rechte Linien A B $\surd: \surd 18. + \surd 12.$ und B C $\surd: \surd 18. - \surd 12.$ von ſolcher Eigenſchafft, daß deren addirte Quadrata, ein rectangulum Medium, auch das von ſolchen beyden Linien beſchloſſene rectangulum, ein rectangulum Medium, welches zugleich mit vorher erwehnten addirten Quadraten, unermeßlich ſey. So wird die zuſammen gebrachte Linie A C $\surd: \surd 18 + \surd 12. + \surd: \surd 18 - \surd 12.$ irrational, und (bina Media potens) oder eine doppelte in Macht ermeßliche Mittel Linie ſeyn.

Erklärung und Beweiß.

Beyde Quadrata A B $\surd 18 + \surd 12.$ und B C $\surd 18 - \surd 12.$ betragen zuſammen $\surd 72.$ alſo ein rectang. Medium. Und beyde Linien in einander multipl giebt $\surd 6.$ ebenfals ein rectangulum Medium.

Jngleichen iſt die Linie A C $\surd: \surd 18 + \surd 12. + \surd: \surd 18 - \surd 12.$ irrational. Und folglich [8. Anmerckung 10.] (bina media potens) oder, eine doppelte in Macht ermeßliche Mittel-Linie.

Die 43. Propoſition.

Ein Binomium oder zweynahmige

Linie AB, wird nur allein in einem Punct D, in beyde Nahmen oder Theile AB und BC, abgetheilet.

Der Beweiß in Linien geſchiehet alſo:

Were es möglich, ſolch binomium in andere 2 Nahmen oder Theile AE und ED in dem Punct E zu zertheilen.

So iſt vor eins klar, daß AB durch die Puncta D und E ungleich, nehmlich: nicht in 2 gleiche Theile, ſondern in verſchiedene Theile (und zwar [37.10.] mit der gantzen AB incommenſurabel) zerſchnitten werde. Da nun [Prop.] AD unermeßlich zu DB, wie AE zu EB, und [37.10] die rectangula AD mit DB, dann AE mit EB, rectang. Media ſind. Und man ſetzete! daß AD □, DB □, AE □, EB □, iedes rational. Dahero auch AD □ +— DB □. Und AE □ —+ EB □ rational. Ebenfals auch AD □ +— DB □ — AE □ + EB □, das iſt 2 AE mit EB — 2 AD mit DB, folglich auch AE mit EB — AD mit DB rational. Da alſo dieſemnach ein rectang Medium das andere mit einem rationale übertreffe. So [27.10.] wieder ſich ſelbſt ſtreitet.

Dahero iſt nicht möglich, daß ein binomium mehr als in einem Punct, kan abgetheilet werden.

Erklärung und Beweiß durch Zahlen.

Es iſt dieſes von Euclide, wiederum eine der ſubtileſten Fürgaben, und der Beweiß in Linien etwas ſchwer zuverſtehen. Es möchte demnach

in Zahlen vielleicht etwas deutlicher erhellen. Beſonders kömmet ſolche 43. Prop. einiger maaſſen mit der 16. Prop. des 3ten Buchs, der Subtilität halber ziemlich überein, nemlich: daß wie man dort dem ſcharffen Winckel, welcher doch würcklich ein von zweyen Linien beſchloſſener Winckel iſt, nicht die geringſte Gröſſe beylegen oder angeben kan. Man hier ebenfals das von Euclide gemeinte Binomium A B, in unendlich andere binomia und conſequenter eben ſo vielen Puncten (mechanice) zu theilen vermag. Hingegen aber, unter-oder zwiſchen ſo vielen Puncten dennoch (geometrice) keinen einigen finden, und angeben kan.

Solches nun in Zahlen zu examiniren, ſey zum Exempel ein Binomium (der Erſten Ordnung) FG in Punct H, alſo zertheilt, daß F H 12 und H G $\sqrt{108}$. Folglich das gantze binomium FG 12 + $\sqrt{108}$. halte.

Es ſey wiederum in einem andern Punct I alſo zertheilt, daß F I 16. I G aber $\sqrt{40\frac{689249}{800000}}$ folglich das binomium F G 16 + $\sqrt{40.\frac{689249}{800000}}$ halte. Mit dieſen nun were dergleichen binomium F G durch die beyden Puncta H und I in 2 verſchiedene binomia abgetheilet.

Denn in gemeinen Zahlen thut H G

$$\sqrt{108} = 10.\tfrac{39230484}{1000000000}$$

Hierzu addire F H - - - - 12.

giebt vor F G zuſammen 22.$\frac{39230484}{1000000000}$.

Fer-

Ferner

IG $\surd\,40.\frac{689219}{1000000}$ iſt gleich $6.\frac{39230484}{100000000}$

hierzu F I addirt - 16.

alſo zuſammen vor F G $22.\frac{39230484}{100000000}$ eben wie vorhero.

Und auf dergleichen Art, were ein iedes binomium in einem andern Punct zu zertheilen, noch viele, ja unendliche Puncta anzugeben.

Man ſolte demnach vermeinen einen Weg gefunden zu haben, wie ein iedes binomium, mehr als in einem Punct zu zertheilen were, keinesweges! In dem es hiermit noch lange nicht ausgemachet. Denn wenn dieſes nur etwas genauer examiniret und berechnet wird, ſo komt $\surd\,108.$ gegen $10.\frac{392304845}{1000000000}$ und $\surd\,40.\frac{689219}{1000000}$ bringt $6.\frac{392304846}{1000000000}$ welches albereit $\frac{1}{1000000000}$ Unterſcheid anzeiget. Daß alſo des binomii Theilung zwar mechanicè einigermaſſen paſſiren, hingegen aber geometricè alſo nicht angenommen werden kan.

Wer dahero die Mühe dran ſpendiren wolte, könte gar leicht finden (Nota, weil man zu einer ieden Quadrat-Wurtzel, durchs quadriren ja ihr quadrat ſo fort finden oder ausrechnen kan) ein iedes binomium, in einem andern Punct (mechanicè) alſo abzutheilen, daß der Unterſcheid noch geringer, als bey des Herrn Ludolph von Ceulen Vergleichung, des Diametri gegen des Circuls Circumferentz betragen ſolte! Wenn nur dieſer 43. Propoſition ein genügen damit geſchehen könte.

te. Es were aber eben ſo viel, als ob man quadraturam circuli, wie verſchiedene ſich dieſerhalben viele vergebliche Mühe gemachet, ausfinden wolte.

Weiln nun ein iedes binomium [37:10] an ſich ſelbſt irrational, und deſſen beyde Theile in rational und irrational Theilen beſtehen, ſo folgt! daß da nicht möglich, des binomii irrational Theil, einem andern irrational Theil, weder durch + noch − geometrice in Zahlen anzugeben oder auszufinden. Alſo dieſemnach auch kein von Euclide derer 6 Arten binomiorum A B, mehr als in einem Punct D (geometricè) abzutheilen ſey. So zu beweiſen war.

Dieſe Propoſition iſt umb des willen etwas ausführlicher abgehandelt worden, ſintemahln itzt folgende 44. 45. 46. 47 und 48 Propos. und viel andere mehr, ja bey nahe das gantze 10te Buch ſich darauf gründet, und man dem hierbey vorfallenden dubitiren, deſto beßer vorbauen, auch folglich umb ſo viel weniger Arbeit vor ſich finden möge.

Anhang.

Und der itzt angeführte Zweiffel nun, könte etwa darinne beſtehen, da man aus erſt vorgeſtelten Beweiß in Linien, ſch ieſſen wolte, wie nunmehro auf keinerley Art, einig binomium, mehr als in einem Punct zu zertheilen were. Dahero ſoll dargethan werden, daß es auf gewiſſe Art dennoch auch geometricè geſchehen könne, nemlich:

lich: Man laſſe A B ein rectangulum Medium ſeyn. Daran A M $\surd$ 192 und B M 2 halte. Welches zum Inhalt $\surd$ 768. dahero ein rectangulum Medium austräget.

Nun theile A M [22 und 27. 10.] alſo: daß die Mittel-Fläche A B, die D B mit einer Mittel-Fläche A C übertreffe (welches dann auf mehr als einerley Art, oder in mehr als einem Punct geſchehen kan) zum Ex. D M gelte $\surd$ 12 ſo wird A D $\surd$ 108 folglich A M ein binomium von $\surd$ 108 + $\surd$ 12 abgegeben (welch binomium des Euclidis 3ter Art gleich zu ſeyn ſcheinet, aber nicht iſt)

Wiederum ſey A M in D alſo zertheilet, daß D M $\surd$ 27 halte. So wird A D $\surd$ 75. folglich A M das binomium $\surd$ 75 + $\surd$ 27 abgeben, und dieſem nach A M auf zweyerley Wege oder in zweyen Puncten geometricè abgetheilet ſeyn.

Nota, wie nun dieſes, gleich als der Beweiß, aus denen Figuren ſelbſt klärlich erhellet, in der That ſeine Richtigkeit hat; ſo iſt hingegen dabey ſo viel zu erinnern, daß man ſehr genau acht haben, und wohl unterſcheiden müſſe, wie bey dieſer 43. Propoſition einig und allein des Euclidis folgende 6erley Arten derer binomiorum, (und andere binomia keinesweges mit darunter) zuverſtehen. Und alſo bleibt dieſe 43. Prop. Euclidis in ihren Werth, in dem Euclides ſeine 6 binomia alſo verknüpffet, daß keine andere itzt berechnete binomia hierbey ſtatt finden können.

In übrigen wird durch dieſen Anhang zugleich vorherige 27. Propoſition etwas deutlicher mit erläutert, als welches um ſo viel mehr nötig, weil obiger Beweiß in Linien des mehrern ſich auf dieſe 27. Prop. beziehet. Nicht weniger iſt auch einiger maſſen mit zu erſehen, wie behutſam mit denen Beweißthümen in Linien zu verfahren, und nicht allezeit ſo gleich vor algemein anzunehmen.

Gleiche Bewandnüs hat es einiger maaſſen, zwiſchen der Algebra Numeroſa und Specioſa, die zwar in der That beyde eins ſeynd. Beym Gebrauch aber die erſte weit ſicherer und gewiſſer als die andere Urtheile. Wer es nicht glauben ſolte, der dürffte nur probiren dis 10te Buch Euclidis per Algebr. ſpecioſam und mit Buchſtaben allein, ſonder der Zahlen Bey-Hülffe zu demonſtriren, der würde gewiß viele vergebliche Arbeit vor ſich finden und mehrmaln nur in finſtern herum tappen müſſen.

Dieſe Erinnerung iſt der Algebra Specioſa zu keinen Tort gemeinet, man läſſet ſelbige billig in ihren Werth, denn ſo die Zahlen dabey mit zu Hülffe genommen werden, iſt es ohne dem in der That eins, ob geſchrieben wird 3 Z + 4 R oder aber $3a^2 + 4a$, es iſt ja beyderley mit Ziffern und Buchſtaben geſchrieben, wenn aber ſchlecht hinſtehet $a^2 + a$, da were zu mal wegen derer irational Quantitäten ſehr viel zu erinnern.

Und alſo bleibt einen ieden die Freyheit, wie er auch immer ſeine Arbeit anſtellen möge, wer

wolte

wolte es wehren, wenn ſich einer ſtatt der Buchſtaben die 7 Planeten erwehlte, und durch eine Algebra Planetarum, vorher angeführtes alſo ſchreiben oder benennen ſolte, 3 ☾ + 4 ☿.

Oder aber eine Algebra Zodiaci, nemlich derer 12 himmliſchen Zeichen, und alſo ſetzete, 3 ♍ + 4 ♓. und ſo weiter andere Arten mehr.

Wenn es zur Reſolution derer Fürgaben, in ſpecie derer algebraiſchen bilancen valor zu erforſchen, ankommet, ſo iſt die Arbeit doch eins, und bleiben die Zahlen ein vor allemal allezeit das Haupt-Fundament. Das übrige an Buchſtaben, man nehme nun die groſſen oder die kleinen Buchſtaben, Planeten, die Zeichen und was Characteres hierzu erwehlet werden, ſeynd doch alles nur entlehnte Beygehülffen.

Demjenigen, welcher einen Weg mit 1000. Schritt abſolviren kan, da der andere wohl 2000. und mehr Schritt zubringet, iſts nicht vor übel zu halten, dem kurtzen Weg zuerwehlen.

Wer dahero mit der Algebra Specioſa näher, als mit der Algebra Numeroſa zu zulangen vermeinet, deme ſtehet es frey, welchen Weg er gehe. Hier bey denen irrational quantitäten, will mir dieſer vor jenen noch am kürtzeſten und deutlichſten zu ſeyn ſcheinen.

Sonſt werde auch künfftig hin, wo dem Beweiß in Zahlen näher und deutlicher, als in Linien zu verſtehen urtheile, dem Beweiß in Linien mehrmaln zurück laſſen.

Die

Die 44. Propoſition.

Eine erſte bimedial Linie A C, wird nur in einem Punct B, in ihre 2 Nahmen oder Theile A B und B C, zertheilet.

Erklärung durch Zahlen.

Es ſey dergleichen Erſte bimedial Linie [38. 10] A C, die zertheilt iſt in Punct B alſo: daß A B $\sqrt{\sqrt{72}}$. und B C $\sqrt{\sqrt{18}}$. Die Figur oder das quadrat A C E F zeiget an, daß deſſen Inhalt oder Vermögen $\sqrt{162} + 12$ austrage. Hieraus rad. quadrat extrah. giebt vor die Seite A C $\sqrt{:\sqrt{162} + 12}$. ſo gleich $\sqrt{\sqrt{72}} + \sqrt{\sqrt{18}}$.

Beweiß.

1. Durch $\sqrt{:\sqrt{162} + 12}$. were zwar die A C in andere Theile abgetheilt, nur kan ſolches [4 Anmerck. 10.] vor keine naturmäßige bimedial Linie paſſiren.

2. Ferner könte A C ebenfals noch auf andere Arten, oder in andere Puncta zertheilet werden. Zum Ex. man theile B C $\sqrt{\sqrt{18}}$. in 3 gleiche Theile, komt vor B D $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{9}}}$ alſo Reſt D C $\sqrt{\sqrt{3\frac{5}{9}}}$. Hierdurch iſt nun A C in einen andern Punct D, in 2 Theile alſo getheilet, nemlich: A D $\sqrt{\sqrt{72}} + \sqrt{\sqrt{\frac{2}{9}}}$ und D C $\sqrt{\sqrt{3\frac{5}{9}}}$. Es iſt aber nunmehro A C $\sqrt{\sqrt{72}} + \sqrt{\sqrt{\frac{2}{9}}} + \sqrt{\sqrt{3\frac{5}{9}}}$. ſo wiederum vor keine bimedial Linie, von [4 Anmerck. 10] geſetzter Eigenſchafft. Uber dis, wenn A D mit D C multipliciret wird, giebt ſolches $\sqrt{16} + \sqrt{\frac{8}{9}}$ welches kein rectang. Medium (wohl aber

ein rectang. der Erſten bimedial könte genennet werden.) Dahero dann eine Erſte bimedial A C, nur in einem Punct B, zu zertheilen iſt. Welches zu beweiſen war.

Die 45. Propoſition.

Eine zweyte bimedial Linie A B, wird nur in einem Punct D, in ihre 2 Nahmen A D, und D B zertheilet.

Erklärung und Beweiß in Zahlen.

Dieſe zweyte bimedial Linie A B iſt [39.10.] in Punct D alſo zertheilet, daß A D $\sqrt{}\sqrt{}$ 600. und D B $\sqrt{}\sqrt{}$ 24. Nun iſt zwar möglich, daß A D oder D B iedes wieder in Macht ermeßliche Theile, zuzertheilen. Nur aber iſt nicht möglich, es alſo zuverrichten, daß bey ſolcher Zertheilung, eine der vorberg. 39. Prop. Natur-mäßige zweyte bimedial-Linie, dadurch hervor zubringen.

Zum Exemp. A D $\sqrt{}\sqrt{}$ 600. bey C in 2. gleiche Theile zertheilt, komt vor A C $\sqrt{}\sqrt{}$ $37\frac{1}{2}$. und vor C B $\sqrt{}\sqrt{}$ $37\frac{1}{2}$. + $\sqrt{}\sqrt{}$ 24. Hierdurch were nun AB, in 2 andere Nahmen oder Theile, nur aber in keine zweyte bimedial, zertheilet worden.

Denn ſo A C mit C B multipliciret wird, entſtehet $\sqrt{}$ $37\frac{1}{2}$ + $\sqrt{}$ 30. welches dann kein [29. und 39. 10.] Naturmäßiges rectang. Medium iſt. Daß alſo eine zweyte Bimedial-Linie A B, nur in einem Punct D, kan zertheilet werden. So zubeweiſen war.

Die

Die 46. Propoſition.

Eine groſſe Linie (Major) A B, wird nur in einem Punct C, in ihre 2. Nahmen A C und C B, abgetheilet.

Erklärung und Beweiß in Zahlen.

Es ſey dergleichen groſſe Linie A B, welche [34. und 40. 10.] in C alſo getheilt. Daß A C $\sqrt{}:6. + \sqrt{}10.$ und C B $\sqrt{}:6 - \sqrt{}10.$ halte.

Nun iſt zwar möglich, daß A C, oder auch C B, folglich A B in einem andern Punct zuzertheilen. Nur aber kan keine Natur-mäßige Groſſe-Linie, dadurch hervorgebracht werden.

Zum Exempel C B, halb in D zertheilt, giebt vor DB $\sqrt{}:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}$. und vor A D $\sqrt{}:6 + \sqrt{}10. + \sqrt{}:1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}$.

Hierdurch were nun A B zwar in 2 andere Nahmen oder Theile getheilet, nur aber in keine Linie Major.

Denn beyde Quadrata von AD und D B zuſammen addirt thun $9 + \sqrt{}2\frac{1}{2} + \sqrt{}26.$ ſo aber [40. 10.] rational, ſeyn ſolte (ingleichen beträgt, das von beyden A D und D B beſchloſſene rectang. $\sqrt{}6\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}$. ſo [40. 10.] ein rectangulum Medium) ſeyn ſolte. Welches aber keines iſt. Dahero man auch die groſſe Linie (Major) A B, nur in einem Punct C abzutheilen vermag. Welches zubeweiſen war.

Die 47. Propoſition.

Eine in Macht ermeßliche Mittel-Linie (media potens) A B, kan nur in einem Punct C, in ihre 2 Nahmen zertheilt werden.

Erklärung und Beweiß in Zahlen.

Die Media potens ſey A B, [35. und 41. 10.] getheilt in A C, √: √ 54. + √ 18. und C B √: √ 54 — √ 18.

Nun iſt zwar möglich A B durch D anders zutheilen, nemlich: theile C B in 2 gleiche Theile, deren eines C D √: √ $3\frac{3}{8}$ — √ $1\frac{1}{8}$. folglich AD. √: √ 54. + √ 18. + √: √ $3\frac{3}{8}$ — √ $1\frac{1}{8}$.

Hierdurch were nun A B zwar in 2 andere Nahmen oder Theile getheilet, nur aber in keine Media potens.

Denn beyde Quadrata A B und von C D, betragen √ $121\frac{1}{2}$ + √ $4\frac{1}{2}$ + 6 welches [41. 10.] ein rectang. Medium ſeyn ſolte, aber nicht iſt. Jngleichen das von beyden A D und C D beſchloſſene rectangulum thut 3 + √ $3\frac{3}{8}$ — √ $1\frac{1}{8}$. welches [41. 10.] ein rationale ſeyn ſolte, ſo es ebenfals nicht iſt. Dahero dann die Media potens A B nur in einem Punct C zuzertheilen. So zubeweiſen war.

Die 48. Propoſition.

Eine rechte Line A B, bina media potens, oder eine doppelte in Macht ermeßliche

liche Mittel-Linie, kan mehr nicht, als nur in einem Punct C, in ihre 2. Nahmen AC und CD zertheilet werden.

Erklärung und Beweiß in Zahlen.

Die bina Media potens AB, ſey [36. u. 42. 10] zertheilt, in AC √: √ 18. + √ 12. und CB √: √ 18 -- √ 12.

Dieſe nun in 2 andere Theile zuzertheilen, werde CB halb zertheilt in Punct D, komt alſo DB √: √ $1\frac{1}{8}$ — √ $\frac{3}{4}$. folglich AC √: √ 18. + √ 12 + √: √ $1\frac{1}{8}$ — √ $\frac{3}{4}$.

Hierdurch were nun AB zwar in 2 andere Nahmen oder Theile, getheilet, nur aber in keine bina media potens.

Denn beyde addirte Quadrata betragen √ $40\frac{1}{2}$ + √ 3 + √ 6 welches [42 10.] ein rectang. Medium seyn ſolte, item, das von beyden beſchloſſene rectang. thut √ $1\frac{1}{2}$ + √ $1\frac{1}{8}$ -- √ $\frac{3}{4}$. ſo auch ein rectang. Medium ſeyn ſolte, welches ebenfals dergleichen nicht iſt.

Dahero kan die bina media potens, mehr nicht alß nur in einem Punct C in ihre 2 Nahmen zertheilt werden. So zubeweiſen war.

Nunmehro folgen

Dieſes 10ten Buches zweyte Definitiones, oder Beſchreibung derer 6 binomiorum, was nemlich deren Natur eigentlich ſey.

Hierzu gehören die Figuren folgender 49. 50. 51. 52. 53. und 54. Propoſition.

Dieſe 6 binomia nun, ſeynd von ſolcher Beſchaffenheit. Da allezeit eine rechte Linie vorgeſtellet und in 2 verſchiedene Theile (auf beſondere ſechſerley Arten) alſo zertheilet wird. Daß entweder beyde Theile, oder aber wenigſt das eine Theil irrational ſey, alſo iſt:

1. Ein Erſtes binomium EG, aus zweyen Theilen EF 12 und EG $\sqrt{80}$. beſtehende. Deſſen gröſſerer Theil EF 12 rational, der kleinere Theil FG $\sqrt{80}$. hingegen irrational, anbey ihrer Quadrata Unterſcheid (64) allezeit eine rational Quadrat-Zahl ausmache.

2. Ein Zweytes binomium EF aus zweyen Theilen $\sqrt{}$GF 180. und EG 10. beſtehende. Deſſen kleinſter Theil EG 10. rational, der gröſte Theil GF $\sqrt{180}$. aber irrational, anbey deren Differenz $\sqrt{80}$ mit dem gröſſern Theil GF $\sqrt{180}$. communicantes, oder durch ein algemeines Maaß $\sqrt{5}$ zu rational Quadrat-Zahlen $\sqrt{16}$. und $\sqrt{36}$. können ausgemeſſen werden.

3. Das Dritte binomium MO, aus zweyen Theilen MN $\sqrt{128}$. und NO $\sqrt{56}$. beſtehende. Da beyde Theile irrational, und die Differenz $\sqrt{72}$. mit dem gröſſern Theil MN $\sqrt{128}$ communicantes, oder mit einem algemeinen Maaß $\sqrt{2}$. zu rational Quadrat-Zahlen $\sqrt{36}$ und $\sqrt{64}$ ſich ausmeſſen laſſen.

4. Das Vierte binomium GH, aus zweyen Theilen GF 12. und FH $\sqrt{96}$ beſtehende. Deſſen gröſſerer Theil GF 12. rational. Und die Differentz $\sqrt{48}$. mit dem gröſſern Theil GF 12.

nicht

nicht communicantes, ſondern gegen einander irrational, oder in Länge unermeßlich ſeynd.

5. Das Fünffte binomium EK, aus zweyen Theilen EJ √24. und JK 4. beſtehende. Deſſen kleinſter Theil JK 4 rational, und die Differenz √8. mit dem gröſſern Theil √24 nicht communicantes, ſondern gegen einander irrational oder in Länge unermeßlich ſeynd.

6. Das Sechſte binomium AC, aus zweyen Theilen AB √45. und BC √18. beſtehende. Deſſen beyde Theile irrational. Und die Differenz √27, mit dem gröſſern Theil AB √45. nicht communicantes, ſondern gegen einander irrational, oder in Länge unermeßlich ſeynd.

Wie nun ſolcher 6 binomiorum Länge, und ihre Nahmen oder Theile in Linien als auch in Zahlen darzuſtellen und zuberechnen, wird durch itzt folgende 49. 50. 51. 52. 53. und 54 Propoſition angewieſen werden.

Die 49. Propoſition.

Ein Erſtes binomium FH zufinden.

Operatio in Linien.

Man nehme die Quadrat-Zahl AB und AC alſo: daß deren Uberſchuß CB keine Quadrat-Zahl ſey. Man nehme denn auch die Linie D rational, und EF ermeßlich zu D, und mache, wie AB zu CB, alſo EF □ zu FG □. So wird EG ein Erſtes binomium ſeyn.

Beweiß.

Weiln EF commenſurabel zu D, ſo iſt [6. def. 10.] EF rational, ingleichen [6. 10.] EF □ commenſurabel zu FG □ und dahero [12. 10.] FG auch rational. Da nun EF □ zu FG □. wie AB zu CB, das iſt Quadrat nicht zu Quadrat, ſo wird [9. 10.] EF incommenſurabel zu FG ſeyn. Endlich, weil durch verkehrte Verhältnüs EF □ zu EF □ — FG □. wie AB zu AC oder □ zu □. So wird [9. 10.] EF commenſurabel zu √ EF □ — FG □ ſeyn. Und dahero [1. def. 48. 10.] iſt EG das Erſte binomium. Welches zu machen war.

Nota, dieſe Operation und Beweiß in Linien iſt, wie ſolche von denen meiſten Autoribus angeführet worden, noch eine der deutlichſten und kürtzeſten, kan iedoch dabey nicht abſehen, wie nötig ſey! daß erſtlich D rational geſetzet, und EF hiernach ſoll proportionirt oder rational genommen werden. Sintemaln ſolches weder zur Operation noch dem Beweiß nothdürfftig erachte, durch berechnung in Zahlen dürffte dieſes vielleicht deutlicher erhellen nemlich:

Operatio in Zahlen.

A 9
B 4
C 5
rational Zahl D 12.
deren □ 144.

Man nehme 2. Quadrat Zahlen A 9 und B 4. (deren Differenz C 5 keine Quadrat-Zahl ſey.) Ferner auch nach gefallen (nur keine

ne Quadrat Zahl) eine rational Zahl D, deren Quadrat iſt 144.

Nun rechne

Wie A □ 9 zu D □ 144 alſo C √ 5 zu FG

komt √ 80 vor FG.

Aus der rational Zahl D 12. und dieſen √ 80 formire das Binomium EG, ſo wird ſolches ein Erſtes Binomium 12 + √ 80 abgeben.

Oder noch kürtzer

Man nehme nach Belieben eine rational Zahl 12 deſſen quadrat iſt 144. it. eine andere rational Zahl 8 deſſen □ 64.

reſtirt 80. (dis quadrat 80 muß keine rational quadrat Zahl ſeyn) ſo giebt 12 + √ 80 das begehrte Erſte Binomium.

Erklärung und Beweiß.

Es iſt [vorherbeſindl. 1 def. 48. 10. gemäß] der gröſſere Theil EF 12. rational, hingegen der kleinere Theil FG √ 80 irrational, anbey iſt ihrer quadrata differenz √ 64 eine rational-quadrat-Zahl. Und dieſemnach EG ein Erſtes Binomium.

Die 50. Propoſition.

Das andere Binomium EF zu finden.

A 9
B 4
C 5
D 10

Operatio.

Man nehme 2 quadrat Zahlen A 9 und B 4 alſo: daß deren differenz C 5 keine quadrat Zahl ſey. Ferner auch nach gefallen eine rational Zahl D 10 und rechne

wie C 5 zum □D 100. alſo A 9 zu GF
kommt √ 180 vor GF.

Aus der rational-Zahl D 10. und dieſem √ 180 formire das Binomium E F. So wird ſolches 10 + √ 180. das Zweyte Binomium E F abgeben.

Erklärung und Beweiß.

Es iſt [2 definit. 48. 10.] der kleinſte Theil EG 10. rational. Der gröſſere Theil GF √ 180 aber, irrational, anbey die differenz √ 80. mit dem gröſſern Theil √ 180 communicantes, oder mit dem allgemeinen Maaß √ 5 zu quadrat Zahlen 16 und 36 ermeßlich. Und dieſem nach EF ein zweytes Binomium.

Die 51. Propoſition.

Ein drittes Binomium MO zu finden.

Operatio.

H 16
I 9
K 7
L 8

Man nehme wiederum 2 quadrat Zahlen H 16 und I 9 deren differenz K 7 keine quadrat Zahl ſey. Ferner auch nach Belieben eine rational Zahl L 8.

Nun

Und rechne alſo:

Multiplicire die quadrat Zahl H 16 mit der rational Zahl L 8. bringt vor M N √ 128.

Ferner

wie H 16 zu K 7 alſo M N √ 128. zu N O.

komt √ 56 vor N O.

Aus M N √ 128 und N O √ 56. formire man das Binomium M O. So wird ſolches ein drittes Binomium √ 128 + √ 56 abgeben.

Erklärung und Beweiß.

Es seynd [3 definit. 48. 10.] beyde Theile M N √ 128. und N O √ 56. irrational, und die differenz √ 72 mit dem gröſſern Theil √ 128 communicantes, oder mit einem allgemeinen Maaß √ 2. zu rational quadrat Zahlen √ 36 und √ 64 ermeßlich. Und dieſemnach M O ein drittes Binomium.

Die 52. Propoſition.

Ein viertes Binomium G H zu finden.

A 9. B 6. C 3. D 12.

Operatio.

Man nehme eine quadrat Zahl A 9 und zertheile ſolche in 2 andere Zahlen (ſo nicht quadrat Zahlen) B 6 und C 3. Ferner werde nach Gefallen eine rational Zahl D 12. genommen

Und alſo gerechnet

wie A 9 zu B 6 alſo D □ 144 zu F H.

komt √ 96 vor F H.

Aus

Aus der rational Zahl D gleich GF und dieſer FH $\surd$ 96 formire man das Binomium GH. ſo wird ſolches ein viertes Binomium 12 + $\surd$ 96 abgeben.

Erklårung und Beweiß.

Es iſt [4 def. 48. 10.] das gröſſere Theil GF 12 rational. Und die differenz $\surd$ 48. mit dem gröſſern Theil 12 nicht communicantes, ſondern ſeynd gegen ein ander irrational, und in Långe unermeßlich. Dahero iſt GH 12 + $\surd$ 96 ein viertes Binomium.

Die 53. Propoſition.

Ein fünfftes Binomium EK zu finden.

A 9. B 6. C 3. D 4.

Operatio.

Man zertheile eine quadrat Zahl A 9 in 2 andere Zahlen (nur nicht in quadrat Zahlen) B 6 und C 3.

Es werde ferner nach Belieben, die rational Zahl D 4 genommen

Und alſo gerechnet

wie B 6 zu A 9 alſo D□ $\surd$ 16 zu IK

komt $\surd$ 24 vor IK

Aus dieſer IK $\surd$ 24 und der rational Zahl D 4 formire das Binomium EK, ſo wird ſolches ein fünfftes Binomium $\surd$ 24 + 4. abgeben.

Erklårung und Beweiß.

Es iſt [5 defin. 48. 10.] der kleinere Theil

IK

IK 4. rational. Und die differenz $\sqrt{8}$. mit den gröſſern Theil $\sqrt{24}$. nicht communicantes, ſondern gegen einander irrational oder in Länge unermeßlich. Weßhalben EK $\sqrt{24} + 4$. ein fünfftes Binomium iſt.

Die 54. Propoſition.

Ein ſechſtes Binomium AC, zu finden.

$\left.\begin{matrix} D\ 3 \\ E\ 2 \end{matrix}\right\}$ F 5 G 4 H 6

Operatio.

Man erwehle zwey Zahlen D 3 und E 2. welche beyde addirt F 5 keine quadrat Zahl ausmachen. Es werde ferner nach Gefallen eine quadrat Zahl G 4. wie auch eine rational Zahl 6 genommen.

Und alſo gerechnet

wie G 4 zu F 5. alſo H $\square$ $\sqrt{36}$ zu AB.

komt $\sqrt{45}$. vor AB.

Ferner

wie F 5. zu E 2. alſo AB $\sqrt{45}$ zu BC.

komt $\sqrt{18}$. vor BC.

Aus AB und BC, wird dann das Binomium AC formiret. So wird ſolches ein ſechſtes Binomium $\sqrt{45} + \sqrt{18}$. abgeben.

Erklärung und Beweiß.

Es ſeynd [6. Definit. 48. 10.] beyde Theile AB und BC irrational. Und die Differenz $\sqrt{27}$. mit dem gröſſern Theil $\sqrt{45}$. nicht

co.i.

communicantes, ſondern gegen einander irrational oder in Länge unermeßlich. Dahero iſt dieſemnach AC √45 + √18. ein ſechſtes Binomium. So zu beweiſen war.

Die 55. Propoſition.

Wenn eine Fläche oder Rectangulum ABDC, von einer rational-Linie AB, und dem erſten Binomio AC beſchloſſen. So wird die rechte Linie MR (deſſen Quadrat MO dis Rectangulum ABDC vermag, das iſt, am Inhalt gleich iſt,) irrational, und ein Binomium ſeyn.

Erklärung und Beweiß in Zahlen.

Das Rectangulum ABDC ſey beſchloſſen, von der Rational-Linie AB 1. und dem Binomio des erſten Geſchlechts AC 8 + √48. nemlich: Des Binomii gröſſerer Theil ſey AE 8. und der kleinere EC √48. Man theile EC halb in F; ingleichen werde AE 8. alſo getheilt: Daß das davon [28. 6.] formirte Rectangulum AL dem Quadrat EK an Inhalt gleich ſey. Dieſem nach wird AG 6. GE oder GL 2. und EF √12. halten.

Man mache ferner das Quadrat MN [14. 2.] gleich dem Rectangulo ABHG, und das Quadrat NO, gleich dem Rectangulo GHIE. So wird MQ √6. und NP oder QR √2. folglich MR √6 + √2. irrational ſeyn, auch ein Binomium

und

(und zwar [6. Def. 48. 10.] des 6ten Geſchlechts oder Eigenſchafft) abgeben.

Berechnung wie AG und GE zu finden.

Man beſchreibe auf AE 8. dem halben Circul-Bogen, und bringe darein FK $\sqrt{12}$. AE iſt halb getheilt in S, dieſemnach wird SK 4. ſeyn, von deſſen Quadrat 16. ſubtrahire das Quadrat FK 12. reſtirt vor das Quadrat SF 4. deſſen rad. quadr. 2 = SF alſo auch FE 2. ſo gleich GE oder GL.

AF thut 6. ſo gleich AG.

Anhang.

1. Eine rational-Linie mit einem erſten Binomio beſchloſſen, iſt und bleibt der Inhalt ſolches Rectang. allezeit ein erſtes Binomium.

2. Eines Quadrats Inhalt ſo gleich einem erſten Binomio, iſt deſſen Seite allezeit ein ſechſtes Binomium, id eſt, wenn aus einem erſten Binomio die Quadrat-Wurtzel extrahirt wird, ſo iſt Radix allezeit ein ſechſtes Binomium.

Alſo iſt hier $\sqrt{:8 + \sqrt{48}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. ein ſechſtes Binomium.

Nota, daß hier, und alſo auch bey etlichen folgenden Propoſitionen die Rational-Linie AB 1. und nicht mehr genommen, oder wird genommen werden, geſchiehet: Die Arbeit oder die Berechnung deſto leichter zu machen, ſonſt aber gilt es gleich viel. Man nehme AB. 2. 3. 6. 8. 10. &c. oder wie es nur ſey, es läufft auf eins hinaus, wie ein jeder nach Gefallen leicht probiren kan.

Die

Die 56. Propoſition.

Wenn eine Fläche oder Rectangulum ABCD, von einer rational-Linie AB, und dem andern Binomio AC beſchloſſen. So iſt die rechte Linie MR (deſſen Quadrat MO erwehntes Rectangulum ABCD vermag, oder an Inhalt gleich iſt,) irrational, und wird die Erſte bimedial-Linie genennet.

Erklärung in Zahlen.

Man formire gleich vorhergehender Propoſ. beyde Figuren, wie zu ſehen.

Es ſey dann die rational-Linie AB 1. Ferner das zweyte binomium AE $\sqrt{180}$ + EC 10. Es werde EC halb in F zertheilt, und AE alſo: Daß das formirte Rectangulum AL [28. 6.] dem Quadrat EK am Inhalt gleich ſey.

Dieſem nach wird AG $\sqrt{125}$ GE oder GL $\sqrt{5}$. und EF 5. halten.

Man mache ferner das Quadrat MN [14. 2.] gleich dem Rectangulo ABHG, und das Quadrat NO gleich dem rect. GHIE. So wird MQ $\sqrt{\sqrt{125}}$. und NP oder QR $\sqrt{\sqrt{5}}$. folglich MR $\sqrt{\sqrt{125}} + \sqrt{\sqrt{5}}$. irrational ſeyn, und eine erſte bimedial-Linie abgeben.

Beweiß. [38. 10.]

1. Daß die gantze Linie MR irrational, bedarff keines Beweiſes.

2. Bey-

2. Beyde Theile $\sqrt{}\sqrt{}$ 125. und $\sqrt{}\sqrt{}$ 5. ſeynd allein in Macht ermeßlich.

3. Beyde Theile ineinander multiplicirt; giebt $\sqrt{}\sqrt{} 625 = \sqrt{} 25 = 5$. alſo ein Rectangulum Medium rationale.

Dahero iſt MR [4. Anmerck. 10.] eine erſte bimedial-Linie.

Anhang.

Das Quadrat MO, thut an Inhalt $\sqrt{} 180 + 10$ daß alſo $\sqrt{}: \sqrt{} 180 + 10 = \sqrt{}\sqrt{} 125 + \sqrt{}\sqrt{} 5$.

Die 57. Propoſition.

Wenn eine Fläche oder Rectangulum ABCD von einer rational-Linie AB, und dem dritten binomio AC beſchloſſen. So iſt die rechte Linie MR (deren Quadrat MO erwehntes Rectang. ABCD vermag oder am Inhalt gleich iſt,) irrational, und wird die Zweyte bimedial-Linie genennet.

Erklärung in Zahlen.

Es werden wiederum gleich vorhergehend, beyde Figuren formiret.

Ferner ſey die rational-Linie AB 1. mit dem dritten Binomio AC $\sqrt{} 128 + \sqrt{} 56$. beſchloſſen. Man theile EC halb in F, und auch AE alſo: Daß [28. 6.] das formirte Rectangulum AL, dem Quadrat EK am Inhalt gleich

werde. Dieſem nach wird AG $\surd 98$. GE oder GL $\surd 2$. und EF $\surd 14$. halten.

Ferner das Quadrat MN = dem Rectangulo ABHG. Und das Quadrat NO = dem Rectang. GHIE gemacht. So wird MQ $\surd\surd 98$. und NP oder QR $\surd\surd 2$. folglich MR $\surd\surd 98 + \surd\surd 2$. irrational, und eine zweyte bimedial-Linie seyn.

Beweiß. [39. 10.]

1. Die gantze Linie MR iſt irrational.

2. Beyde Theile ſeynd allein in Macht ermeßlich.

3. Beyde Theile ineinander multiplicirt, geben $\surd 14$. ſo ein Rectangulum Medium.

Daher o dieſe MR $\surd\surd 98 + \surd\surd 2$. eine zweyte bimedial-Linie.

Anhang.

Das Quadrat MO thut $\surd 128 + \surd 56$. Dahero iſt $\surd : \surd 128 + \surd 56 = \surd\surd 98 + \surd\surd 2$.

Die 58. Propoſition.

Wenn eine Fläche oder Rectangulum ABCD, von einer rational-Linie AB, und dem vierten binomio AC beſchloſſen. So iſt die rechte Linie MR (deſſen Quadrat MO, erwehntes Rectang. ABCD vermag, oder an Inhalt gleich iſt,) irrational, und wird Major die Groſſe genennet.

Erklä-

Erklärung in Zahlen.

Man formire wiederumb gleich vorhero beyde Figuren, wie zu ſehen. Es ſey die rational-Linie AB 1. und das vierte binomium AC 6 $+\sqrt{24}$. Nun werde EC halb getheilt in F, ingleichen AE alſo getheilt: Daß [28. 6.] das formirte Rectang. AL, dem Quadrat EK an Inhalt gleich ſey. Dieſem nach wird AG $3+\sqrt{3}$. und GE oder GL $3-\sqrt{3}$. und EF $\sqrt{6}$ halten.

Man mache ferner das Quadrat MN gleich dem Rectang. ABHG, und das Quadrat NO gleich dem Rectangulo GHIE. So wird MQ $\sqrt{:3+\sqrt{3}}$. und NP oder QR $\sqrt{:3-\sqrt{3}}$. Folglich MR $\sqrt{:3+\sqrt{3}}+\sqrt{:3-\sqrt{3}}$. irrational, und die begehrte groſſe Linie (Major) ſeyn.

Beweiß. [40. 10.]

1. Die gantze Linie MR iſt irrational.
2. Beyde Theile ſeynd in Macht unermeßlich.
3. Beyder Theile ihre Quadrata addirt, geben eine rational-Fläche 6.
4. Und das von beyden beſchloſſene Rectang. iſt ein Rectang. Medium $\sqrt{6}$. Dahero [6. Anmerckung 10.] iſt dieſe Linie MR (Major) oder eine groſſe Linie.

Anhang.

Das Quadrat MO thut $6+\sqrt{24}$. iſt alſo $\sqrt{:6+\sqrt{24}}=\sqrt{:3+\sqrt{3}}+\sqrt{:3-\sqrt{3}}$.

Die 59. Propoſition.

Wenn eine Fläche oder Rectangulum ABCD von einer rational-Linie AB, und dem fünfften binomio AC beſchloſſen. So iſt die rechte Linie MR (deſſen Quadrat MO, erwehntes Rectang. AB CD vermag, oder an Inhalt gleich iſt,) irrational, und wird (Media potens) eine in Macht ermeßliche Mittel-Linie genennet.

Erklärung in Zahlen.

Man formire wie vorhero beyde Figuren. Die rational-Linie AB ſey 1. Ferner ſey das fünffte Binomium AC $\surd 24 + 4$. Es werde EC halb zertheilt in F, ingleichen AE alſo zertheilt: Daß [28. 6.] das formirte Rectang. AL, dem Quadrat EK am Inhalt gleich werde. Dieſemnach wird AG $\surd 6 + \surd 2$. und GE oder GL $\surd 6 - \surd 2$. dann EF 2. halten.

Man mache ferner [14. 2.] das Quadrat MN = dem Rectang. ABHG, ebener maßen das Quadrat NO = dem Rectangulo GHIE. So wird MQ $\surd : \surd 6 + \surd 2$. und NP oder QR $\surd : \surd 6 - \surd 2$. folglich MR $\surd : \surd 6 + \surd 2 + \surd : \surd 6 - \surd 2$. irrational, und die begehrte Linie Media potens ſeyn.

Beweiß. [41. 10.]

1. Die gantze Linie Media potens MR iſt irrational.

2. Beyde

2. Beyde Theile MQ und QR ſeynd in Macht unermeßlich.

3. Beyder Theile Quadrata addirt, bringt $\sqrt{24}$. ſo ein Rectangulum Medium.

4. Und das von beyden beſchloſſene Rectangulum thut 2. ſo ein rationale. Dahero iſt dieſe Linie MR $\sqrt{:\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\sqrt{:\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. Media potens.

Anhang.

Das Quadrat MO thut $\sqrt{24}+4$. Iſt alſo $\sqrt{:\sqrt{24}+4} = \sqrt{:\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\sqrt{:\sqrt{6}-2}$.

Die 60. Propoſition.

Wenn eine Fläche oder Rectang. AB CD, von einer rational-Linie AB, und dem ſechſten binomio AC beſchloſſen. So iſt die rechte Linie MR (deſſen Quadrat MO, erwehntes Rectang. ABCD vermag, oder an Inhalt gleich iſt,) irrational, und wird (bina Media potens) eine doppelte in Macht ermeßliche Mittel-Linie genennet.

Erklärung in Zahlen.

Man formire nochmahln gleich vorhero beyde Figuren.

Dann ſey die rational-Linie AB 1. Ferner das ſechſte binomium AC $\sqrt{45}+\sqrt{18}$. Es werde EC halb zertheilt in F, ingleichen auch

AE alſo zertheilt: Daß [28. 6.] das formirte Rectang. AL, dem Quadrat EK am Inhalt gleich ſey. Dieſemnach wird AG $\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{6\frac{3}{4}}$. und GE oder GL $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{6\frac{3}{4}}$. dann EF $\sqrt{4\frac{1}{2}}$. halten.

Man mache ferner [14. 2.] das Quadrat MN = dem Rectang. ABHG, alſo auch das Quadrat NO = dem Rectang. GHIE. So wird MQ $\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{6\frac{3}{4}}}$. und NP oder QR $\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{6\frac{3}{4}}}$. Folglich MR $\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{6\frac{3}{4}}} + \sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{6\frac{3}{4}}}$. irrational, und die begehrte (bina Media potens) oder doppelte in Macht ermeßliche Mittel-Linie ſeyn.

Beweiß. [42. 10.]

1. Die gantze Linie bina Media potens MR iſt irrational.

2. Beyde Theile ſeynd in Macht unermeßlich.

3. Beyder Theile addirte quadrata, geben ein Rectang. Medium $\sqrt{45}$.

4. Und das von beyden beſchloſſene Rectangulum thut $\sqrt{4\frac{1}{2}}$. welches auch ein Rect. Medium, ſo gegen denen addirten Quadraten $\sqrt{45}$. unermeßlich.

Dahero iſt dieſe Linie MR [8. Anmerck. 10.] bina Media potens.

Anhang.

Das Quadrat MO iſt an Inhalt $\sqrt{45} + \sqrt{18}$. Iſt alſo $\sqrt{:\sqrt{45} + \sqrt{18}} = $ MR $\sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{6\frac{3}{4}}} + \sqrt{:\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{6\frac{3}{4}}}$.

Die 61. Propoſition.

Das Quadrat MO, eines binomii MR an eine rational-Linie AB gebracht. Machet oder bringt hervor die Breite AC, ſo ein Erſtes binomium iſt.

Erklärung.

Diß iſt anders nichts (weil hier von einem Erſten binomio geſaget wird,) als vice verſa vorhergehende 55. Propoſition zu verſtehen. Denn wie dort das Rectangulum AD gleich dem Quadrat MO, (deſſen Seite MR ein binomium, und zwar des ſechſten Geſchlechts.) So iſt es eben ſo viel, als würde hier das dortige Quadrat, MR, an die rational-Linie AB gefüget oder gebracht, und das verlangte binomium AC dadurch formiret.

Zu einem deſto ſichern Beweiß, ſoll dieſes hier durch Zahlen zu reſolviren wiederhohlet werden.

Es bleibe dahero das Quadrat MO des binomii MR $8 + \sqrt{48}$. welches [28. 6.] an die rational-Linie AB 1. gebracht, das Rectangulum ABDC hervor bringt, deſſen Inhalt, gleich dem Inhalt des Quadrats $8 + \sqrt{48}$. Dieſen Inhalt mit AB 1. abdividirt, bringt $8 + \sqrt{48}$ vor AC, ſo ein Erſtes binomium iſt.

Nota, Man comparire ſolche Procedur mit erwehnter vorher befindlichen 55. Propoſition

und deren Figuren, ſo wird man Augenſcheinlich ſehen, daß dieſes mit jenen einerley. Nur finde noch dabey zu erinnern. Weil dort bey der 55. Prop. angemercket worden, daß das erſte binomium mit einer rational-Linie beſchloſſen, ein Rectangulum, deſſen gleichhaltendes quadrat dann ein ſechſtes binomium hervor bringe. Man hier vice verſa ebenfalls wieder ein ſechſtes binomium MR erwehlen, und das Quadrat MO alſo formiren müſte. Welches aber eben nicht nöthig, vielmehr weil ſolches hier ein ſechſtes binomium effectuiret, die übrigen binomia es deſto ehe effectuiren. Wie dieſes von einem ieden gar leicht examiniret und probiret werden kan.

Die 62. Propoſition.

Das Quadrat MO, einer Erſten bimedial-Linie MR ($\sqrt{}\sqrt{}$ 125 + $\sqrt{}\sqrt{}$ 5.) an eine rational-Linie AB 1. gefüget. Bringt hervor die Breite eines zweyten Binomii AC ($\sqrt{}$180 + 10.)

Erklärung und Beweiß.

Hier iſt wieder das Schema oder Figur vorhergehender 56. Propoſition, auch dortiger Beweiß zu betrachten, weil dieſe 62. Propoſition anders nichts, als jene 56 Propoſit. vice verſa iſt.

Die 63. Propoſition.

Das Quadrat MO einer zweyten Bime-

medial-Linie MR ($\sqrt{}\sqrt{}98+\sqrt{}\sqrt{}2$) an eine rational Linie AB 1. angefüget, bringet hervor die Breite eines dritten Binomii AC ($\sqrt{}128+\sqrt{}56$)

Erklärung und Beweiß.

Hier ſeynd wiederum die Figuren und der Beweiß vorhergehender 57. Propoſition in Betrachtung zuziehen. Wolte man es vice verſa probiren. So iſt die zweyte bimedial-Linie MR $\sqrt{}\sqrt{}98.+\sqrt{}\sqrt{}2.$ und deſſen Quadrat MO, ſo an Inhalt beträgt $\sqrt{}128+\sqrt{}56.$ an die rational-Linie AB 1. gefüget, dieſes rectanguli Inhalt auch $\sqrt{}128+\sqrt{}56.$ Dis mit AB 1. abdividirt, giebt $\sqrt{}128+\sqrt{}56.$ ſo ein drittes binomium iſt.

Welches dann alles der 57. Propoſition gantz conform.

Die 64. Propoſition.

Das Quadrat MO. der linea Major, oder groſſen Linie MR ($\sqrt{}:3+\sqrt{}3+\sqrt{}:3-\sqrt{}3$) an eine rational-Linie AB 1. gefüget, bringt die Breite AC ($6+-\sqrt{}24$) des vierten binomii hervor.

Erklärung und Beweiß.

Iſt eben vorhergehende 58. Prop. und dahero in allen und jeden vice verſa derſelben Figuren und Beweiß hierunter zu verſtehen, auch leicht nach zu rechnen.

Die 65. Propoſition.

Das Quadrat MO, der Linie Media potens MR ($\surd : \surd 6 + \surd 2 + \surd : \surd 6 - \surd 2$.) an eine rational Linie AB 1. gefüget. Bringt die Breite AC ($\surd 24 + 4$.) ein fünfftes binomium hervor.

Erklärung und Beweiß.

Iſt vice verſa vorhergehende 59. Propoſition und dahero ſelbige Figuren und Beweiß in Betrachtung zuziehen, auch zur Ubung nach zu rechnen.

Die 66. Propoſition.

Das Quadrat MO, der linea bina media potens MR ($\surd : \surd 11\frac{1}{4} + \surd 6\frac{3}{4} + \surd : \surd 11\frac{1}{4} - \surd 6\frac{3}{4}$.) an eine rational Linie AB 1. gefüget. Bringt die Breite AC ($\surd 45 + \surd 18$.) ein ſechſtes binomium hervor.

Erklärung und Beweiß.

Man beſehe hierüber vorhergehender 60. Propoſition Figuren, die Operation, und dem Beweiß, weil erwehnte 60. Propoſition ebenfals hier vice verſa zuverſtehen. Und alſo dieſe Arbeit gleich vorherigen zu eines ieden Ubung ausgeſetzt verbleibet.

Die 67. Propoſition.

Die rechte Linie DF, welche mit einem binomio AC in Länge ermeßlich. Wird auch ein binomium, und zwar in eben der Ordnung (als AC iſt) ſeyn.

Erklärung.

AC 12 + √108 ein Erſtes binomium, iſt ermeßlich in Länge mit DF 8 + √48 durch ein algemein Maaß 4 +- √12, nemlich: wie 3 zu 2.

Beweiß.

Wegen der proportionirt in Länge ermeßlichen Verhältnüs derer Theile AB gegen DE, wie BC gegen EF, iſt DF [6 und 7. ax. 1.] auch ein Erſtes binomium.

Die 68. Propoſition.

Die rechte Linie DF, ſo mit einer bimedial Linie AC in Länge ermeßlich. Wird ebenfals dergleichen bimedial-Linie, und ſelbiger Ordnung oder Geſchlechts ſeyn.

Erklärung.

Man laſſe die bimedial-Linie AC ſeyn √√1152 +- √√288. welche in Länge ermeßlich mit DF √√72 +- √√18. wie √√16 gegen √√1. das iſt wie 2 gegen 1.

Beweiß.

Wegen proportionirter in Länge ermeßlichen Verhältnüs, iſt [6.7. ax. 1.] DF auch eine mit

AC

AC in gleicher Ordnung ſtehende bimedial-Linie.

Die 69. Propoſition.

Eine rechte Linie DF, mit einer Linie Major AC, in Länge ermeßlich. Wird DF auch eine Groſſe Linie (Major) ſeyn.

Erklärung.

Die Linie Major AC ſey √: 54 + √ 810. + √: 54 − √ 810. welche in Länge ermeßlich mit DF √: 6 + √ 10 + √: 6 − √ 10. wie 3 gegen 1.

Beweiß.

Wegen der in Länge ermeßlich proportionirten Verhältnüs, iſt DF [6 und 7 ax. 1.] auch eine mit AC gleich Natur-mäßige Groſſe Linie Major.

Die 70. Propoſition.

Eine rechte Linie DF, mit einer Linie media potens AC in Länge ermeßlich. Wird DF auch media potens ſeyn.

Erklärung.

Die Linie Media potens AC ſey √√ 96 + √√ 32 + √√ 96 − √√ 32 welche in Länge ermeßlich mit DF √√ 6 + √√ 2. + √√ 6 − √√ 2. nemlich wie 2 gegen 1.

Beweiß.

Wegen der in Länge ermeßlich proportionirten Verhältnüs, iſt [6 und 7. ax. 1.] DF auch eine mit AC Natur-mäßige linea Media potens.

Die

Die 71. Propoſition.

Eine rechte Linie DF mit einer Linie bina Media potens AC in Länge ermeßlich. Wird DF auch bina Media potens ſeyn.

Erklärung

Die Linie bina Media potens AC ſey $\sqrt{:}\sqrt{288} + \sqrt{192} + \sqrt{:}\sqrt{288} - \sqrt{192}$. welche in Länge ermeßlich mit DF $\sqrt{:}\sqrt{1458} + \sqrt{972} + \sqrt{:}\sqrt{1458} - \sqrt{972}$. nemlich wie 2 gegen 3.

Beweiß.

Wegen der in Länge ermeßlich gleichen Verhältnüs, iſt [6 und 7 ax. 1.] DF auch eine und zwar mit AC Natur-mäßige Linie bina Media potens.

Nota, Dieſe vorhergehende 67. 68. 69. 70 und 71. Propoſition ſeynd faſt eins, und weren gar füglich zuſammen vor eine Propoſition anzunehmen. Seynd alſo nur in denen differirenden Linien unterſchieden.

Der Nutz hierbey iſt, daß ſolche irrational Linien in etwas repetirt, und deren Eigenſchafft immer nach und nach beſſer bekand werde, beſonders aber wird man dabey gewahr. Wie aus einer ieden Line, zum Exempel Media potens, durch das algemeine Maaß, ſo gleich eine andere Media potens zu formiren oder zufinden, nicht weniger wie man ſelbige addiren, ſubtrahiren, multipliciren und dividiren könne.

Die

Die 72. Propoſition.

Wenn ein rational rectangulum ABCD, und ein rectangulum Medium BEFC zuſammen gebracht werden. So entſtehen 4 irrational-Linien GH, welche die gantze Fläche AF vermögen (das iſt, da ſolcher Linie GH ihr Quadrat dem Inhalt der Fläche AF gleich ſeyn könne) nemlich: Ein Binomium, die Erſte bimedial, linea Major, und Media potens.

Erklärung und Beweiß.

Viererley Caſus ſeynd hier zu erörtern, welche gleichſam eine Repetition vorherg. 55. 56. 58 und 59. Propoſition, nemlich:

1 Satz. Wenn das rationale ABCD 8. und dieſemnach gröſſer, alß das angefügte rectangulum Medium BEFC $\sqrt{48}$. (und zwar daß der Unterſcheid [1. def. 48. 10.] $\sqrt{16}$ eine rational Quadrat-Zahl ſey.) So iſt die rechte Linie GH (als die Seite eines Quadrats, ſo das rectangulum AF vermag) [Anhang 55. 10] $\sqrt{:8+\sqrt{48}}$ gleich $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ein binomium (und zwar der ſechſten Ordnung.)

2 Satz. Wenn das rationale ABCD 10. und deme nach kleiner, als das angefügte rectangulum Medium BEFC $\sqrt{180}$. Und zwar, daß [2. def. 48. 10.] die Differenz $\sqrt{80}$, und der gröſſere Theil $\sqrt{180}$ communicantes oder in

Län-

Länge ermeßlich) So iſt die Linie GH (als die Seite eines Quadrats, ſo das rectangulum AF vermag) [Anhang 56. 10.] √: 180 + 10. gleich √√ 125 + √√ 5 eine Erſte bimedial

3 Satz. Wenn das rationale ABCD 6. und deme nach gröſſer, als das angefügte rectangulum Medium BEFC √ 24. (und zwar [4. Def. 48. 10.] daß der Unterſcheid √ 12 mit dem gröſſern Theil in Länge incommenſurabel) So iſt die Linie GH, (alß die Seite eines Quadrats, ſo das rectang. AF vermag) [Anhang 58. 10.] √: 6 + √ 24 gleich √: 3 + √ 3 + √: 3 − √ 3. eine Groſſe Linie (Major.)

4 Satz. Wenn das rationale ABCD 4. und dieſem nach kleiner, als das angefügte rect. Medium BEFC √ 24. (und zwar [5 def. 48. 10.] daß der Unterſcheid √ 8 mit dem gröſſern Theil √ 24 in Länge nicht ermeßlich) So iſt die Linie GH (als die Seite eines Quadrats, ſo das rectang. AF vermag) [Anhang 59. 10.] √: √ 24 + 4 gleich √: √ 6 + √ 2 + √: √ 6 − √ 2. Media potens. So zubeweiſen war.

Die 73. Propoſition.

Wenn zwey rectangula Media ABCD und BEFC, die gegen einander incommenſurabel, zuſammen gebracht werden. So entſtehen zwey irrational Linien GH, welche die gantze Fläche AF ver-

vermögen, nemlich: deren eine die zweyte bimedial, die andere aber bina media potens iſt.

Erklärung und Beweiß.

Zweyerley Caſus ſeynd hier zu erörtern ſo ebener maßen eine Repetition vorhergeh. 57 und 60 Propoſition, nemlich:

1 Satz. Wenn das rectang. Medium ABCD $\sqrt{128}$. und deme nach größer, alß das angefügte rectang. Medium BEFC $\sqrt{56}$ (und zwar [3. def. 48. 10.] da beyde Theile irrational, und der Unterſcheid $\sqrt{72}$, mit dem gröſſern Theil $\sqrt{128}$ in Länge ermeßlich) So iſt die Linie GH (als die Seite eines Quadrats, ſo das rectang. AF vermag) [Anhang 57. 10.] $\sqrt{}:\sqrt{128} + \sqrt{56}. = \sqrt{}\sqrt{98}. + \sqrt{}\sqrt{2}.$ eine zweyte bimedial.

2 Satz. Wenn das rectang. Medium ABCD $\sqrt{45}$. und dieſem nach gröſſer, als das angefügte rectangulum Medium BEFC $\sqrt{18}$. (und zwar [6 def. 48. 10.] da beyde Theile irrational, und der Unterſcheid $\sqrt{27}$. mit dem gröſſern Theil $\sqrt{45}$. in Länge unermeßlich) So iſt die Linie GH (als die Seite eines Quadrats, ſo das rectangulum AF vermag) [Anhang. 60. 10.] $\sqrt{}:\sqrt{45} + \sqrt{18}$. gleich $\sqrt{}:\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{6\frac{3}{4}} + \sqrt{}:\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{6\frac{3}{4}}$ die verlangte bina media potens.

Die 74. Propoſition.

Wenn man von einer rational-Linie AB, die rational Linie AC, (die zu der gan-

gantzen Linie AB nur in Macht ermeßlich) weg nimt. So iſt der Reſt CB irrational, und wird apotome, eine abgekürtzte Linie, oder reſiduum genennet.

Erklärung.

AB ſey rational 6. hiervon werde AC $\sqrt{27}$. weggenommen. So wird der Reſt CB 6 – $\sqrt{27}$. halten, und ein apotome oder reſiduum ſeyn.

Beweiß.

AB 6 iſt [3. def. 10.] gegen AC $\sqrt{27}$. in Macht ermeßlich, weßwegen [8. def. 10.] AC rational, und CB 6 – $\sqrt{27}$ iſt [7. def. 10.] irrational. Dahero [9. Anmerck. 10.] CB ein apotome oder reſiduum.

Nota, dem Beweiß durch Linien anzuführen, erachte unnötig zu ſeyn. Denn wer dieſes nicht verſtehen ſolte, deme würde der Beweiß in Linien noch weniger vernemlich und leicht fallen.

Die 75. Propoſition.

Wenn von einer Medial-Linie AB eine andere Medial Linie AC (welche mit jener AB in Macht ermeßlich, und beyde eine rational Fläche beſchlieſſen) weggenommen wird. So iſt der Reſt CB irrational. Und wird ſolche Linie CB genennet, der Medial-Linie Erſtes reſiduum.

Erklärung.

Man erwehle [28. 10.] 2 Media oder Mittel-Linien, die ſeynd AB $\sqrt{\sqrt{72}}$. und AC $\sqrt{\sqrt{18}}$. So wird der Reſt CB $\sqrt{\sqrt{72}} - \sqrt{\sqrt{18}}$. die begehrte Linie, nemlich: Der Medial-oder Mittel-Linie Erſtes Reſiduum, oder aber [10. Anmerck. 10.] (Mediæ apotome prima) die Erſte Mittlere abgekürtzte Linie, ſeyn.

Beweiß [38. 10.]

Beyde Theile $\sqrt{\sqrt{72}}$. und $\sqrt{\sqrt{18}}$. ſeynd Medial, und nur allein in Macht ermeßlich. Beſchlieſſen eine rational-Fläche 6. Und der Reſt CB $\sqrt{\sqrt{72}} - \sqrt{\sqrt{18}}$. iſt irrational. Dahero iſt [10. Anmerck. 10.] CB $\sqrt{\sqrt{72}} - \sqrt{\sqrt{18}}$. der Medial-Linie Erſtes reſiduum (Mediæ apotome prima.)

Die 76. Propoſition.

Wenn von einer Medial-Linie AB, eine andere Medial-Linie AC (die mit jener AB in Macht ermeßlich, und beyde ein rectangulum Medium beſchlieſen) weggenommen wird. So verbleibet der Reſt CB irrational, und wird der Medial zweytes reſiduum (Mediæ apotome Secunda) genennet.

Erklärung.

Man erwehle [29. 10.] 2 Mittel-Linien AB $\sqrt{\sqrt{600}}$. und AC $\sqrt{\sqrt{24}}$. So wird AC von

AB

AB weggenommen, der Reſt CB $\sqrt{}\sqrt{}$ 600 — $\sqrt{}\sqrt{}$ 24. die begehrte Linie, und der Medial zweytes Reſiduum ſeyn.

Beweiß. (39. 10.)

Beyde Theile $\sqrt{}\sqrt{}$ 600. und $\sqrt{}\sqrt{}$ 24. ſeynd gegen einander allein in Macht ermeßlich.

Beſchlieſen ein rectangulum Medium $\sqrt{}$ 120. Und der Reſt $\sqrt{}\sqrt{}$ 600 — $\sqrt{}\sqrt{}$ 24 iſt irrational. Dahero dann nach der Propoſ. begehren [11. Anmerck. 10.] CB $\sqrt{}\sqrt{}$ 600 — $\sqrt{}\sqrt{}$ 24 der Medial zweytes reſiduum (mediæ apotome Secunda) ſeyn wird.

Die 77. Propoſition.

Wenn von einer rechten Linie AB, eine andere AC (ſo mit der gantzen AB in Macht unermeßlich, und die zuſammen geſetzte Fläche, derer beyden Quadrata von AB und AC rational machet. Nicht weniger beyde AB und AC ein rectang. Medium beſchlieſen) ſubtrahiret wird. So iſt der Reſt CB irrational, und wird ſolche Linie CB genennet die kleine (Minor.)

Erklärung.

Man erwehle [34. 10.] 2 rechte Linien AB $\sqrt{}$: 32 + $\sqrt{}$ 384. und AC $\sqrt{}$: 32 — $\sqrt{}$ 384. So wird AC von AB weggenommen der Reſt BC $\sqrt{}$:

32 + √384 + √: 32 — √ 384 die begehrte Linie die kleine (Minor) abgeben.

Beweiß. [40. 10.]

Beyde Theile AB und AC ſeynd [2. def. 10.] in Macht unermeßlich. Und beyde zuſammen addirte Quadrata betragen 64. ſo rational. Auch das von beyden beſchloſſene rectangulum thut √ 640. ſo ein Rectangulum Medium.

Endlich iſt der Reſt BC auch irrational. Und dieſemnach [12. Anmerck. 10.] BC √: 32 + √ 384 — √: 32 — √ 384. die begehrte Linie (Minor) oder die kleine.

Die 78. Propoſition.

Wenn von einer rechten Linie AB, eine andere rechte Linie AC (ſo mit AB in Macht unermeßlich, und beyde zuſammen addirte Quadrata, von AB und AC ein rectang. Medium, desgleichen das von beyden AB und AC beſchloſſene rectangulum, rational machen) ſubtrahiret wird. So iſt der Reſt CB irrational. Und wird genennet, eine mit dem rationale gantzes medium austragende (cum rationali medium totum efficiens.)

Erklärung.

Man erwehle [35. 10.] 2 rechte Linien AB √: √54 + √18. und AC √: √54 — √ 18. So

So wird AC von AB weggenommen, der Reſt CB $\surd: \surd 54 + \surd 18 - \surd: \surd 54 - \surd 18$. die begehrte Linie, eine mit dem rationale gantzes Medium austragende (cum rationali medium totum efficiens) ſeyn.

Beweiß. (41, 10.)

Beyde Theile AB und AC ſeynd in Macht unermeßlich. Die zuſammen addirte Quadrata, beſchlieſen ein rectang. Medium $\surd 216$. Auch iſt das von beyden Theilen AB und AC beſchloſſene rectang. ein rationale 6. Endlich der Reſt CB irrational. Und dieſemnach ſolcher Reſt CB $\surd: \surd 54. + \surd 18 - \surd: \surd 54 - \surd 18$. [13. Anmerck. 10.] die begehrte Linie cum rationali Medium totum efficiens.

Die 79. Propoſition.

Wenn von einer rechten Linie AB, eine andere rechte Linie AC (welche mit AB in Macht unermeßlich, und die zuſammen addirte Quadrata AB, und AC Medial, ingleichen das von AB und AC beſchloſſene rectang. ein rectang. Medium ausmachet, ſo mit vorigen zuſammen addirten Quadraten unermeßlich) ſubtrahiret wird. So iſt der Reſt CB irrational, und wird genennet, eine mit der Medial gantzes Medium austragende (cum Medio medium totum efficiens.)

 Er-

Erklärung.

Man erwehle [36. 10.] zwey in Macht unermeßliche rechte Linien AB $\sqrt{}: \sqrt{}18 + \sqrt{}12$. Und AC $\sqrt{}: \sqrt{}18 - \sqrt{}12$. So wird AC von AB weggenommen, der Reſt CB $\sqrt{}: \sqrt{}18. + \sqrt{}12 - \sqrt{}: \sqrt{}18 - \sqrt{}12$. irrational, und die begehrte Linie, cum Medio Medium totum efficiens (das iſt, eine mit der Medial gantzes Medium austragende) ſeyn.

Beweiß (42. 10.)

1. Beyde Theile ſeynd in Macht unermeßlich.

2 Beyde addirte Quadrata betragen $\sqrt{}72$. ſo Medial, oder ein rect. Medium.

3. Das von beyden Theilen beſchloſſene rect. hält $\sqrt{}6$. ſo auch Medial.

4. Der Reſt CB iſt irrational. Und dieſemnach ſolcher Reſt CB $\sqrt{}: \sqrt{}18 + \sqrt{}12 - \sqrt{}: \sqrt{}18 - \sqrt{}12$. [14. Anmerck. 10.] die begehrte Linie, cum medio medium totum efficiens.

Die 80. Propoſition.

Mit einer Reſidual-Linie CB, kommet nur allein, eine rational-Linie AC (welche AC mit der gantzen AB allein in Macht ermeßlich) über ein, oder kan daran (nemlich an CB) gefüget werden.

Erklärung.

Es iſt dieſe 80. Propoſition eigentlich vice verſa vorhergehende 43 Propoſition, und dahero wiederum

derum eine der ſubtileſten Fürgaben zunennen. Und betrifft, oder ſeynd einig und allein diejenigen 6 reſidua derer 6 binomiorum (welche 6 binomia albereit durch die 49. 50. 51. 52. 53 und 54 Prop. dis 10 Buchs abſolviret worden, die 6. reſidua aber in denen folgenden 86. 87. 88. 89. 90 und 91. Prop. ebenfals abgehandelt werden) hierunter zuverſtehen. Bey welcher Beſchaffenheit auch dieſe 80. Prop. in dergleichen valeur und der 43 Prop. conform zu tractiren iſt. Weiln es ſonſt auſſer dem gar wohl möglich, viele andere rational-Linien AC. an eine Reſidual-Linie CB anzufügen, daß dennoch die gantze rechte Linie AB, mit der rational Linie AC in Macht ermeßlich ſey, wovon bald weiter folgen ſoll. Voritzo aber dieſe 80 Prop. zu endigen ſoll ſeyn.

Operatio.

Man laſſe die gantze rechte Linie AB 12. und die rational-Linie, ſo mit AB allein in Macht ermeßlich AC $\sqrt{108}$ ſeyn. So komt vor CB 12 — $\sqrt{108}$. welches ein reſiduum (und zwar der Ordnung nach ein Erſtes reſiduum) iſt.

Beweiß.

Wolte man dieſes in einem andern Punct zum Ex. in Punct D verrichten, und AB 12 bleiben, hingegen die rational-Linie AD (ſo mit AB allein in Macht ermeßlich) $\sqrt{106}$. ſeyn laſſen. So würde ſolch reſiduum DB 12 — $\sqrt{106}$ weder mit 12 — $\sqrt{108}$ überein: oder gleich, auch ſonſt [1 def. 48. 10.] kein reſiduum des erſten

Geſchlechts, hervorkommen. Dahero iſt nicht möglich, dem reſiduo CB 12 — $\surd$ 108. eine andere rational Linie AC, (welche mit AB in Macht ermeßlich, und ein reſiduum des Erſten Geſchlechts oder Erſten Ordnung hervor brächte) beyzuſetzen.

Anhang.

Sonſt aber oben erinnerter maaſſen, an die reſidual-Linie CB, viele andere rational Linien AC, welche mit der gantzen AB allein in Macht ermeßlich, anzufügen, iſt gar wohl möglich. Zum Exempel.

Man laſſe ſeyn die gantze Linie AB 14 und die rational, ſo mit der gantzen AB allein in Macht ermeßlich, ſey AC $\surd\,153\,\frac{910751}{1600000}$. So wird die reſidual BC 14. — $\surd\,153\,\frac{910751}{1600000}$ halten, welches = 12 — $\surd$ 108. Und dieſemnach der reſidual-Linie CB 12 — $\surd$ 108. eine andere rational Linie AC 14 angefüget ſeyn. Sintemal in gemeinen Zahlen 12 — $\surd\,108 = 1.\frac{607695154}{1000000000}$

und 14 — $\surd\,153.\frac{910751}{1600000} = 1.\frac{607695154}{10000000000}$

Wie nun dieſes in ſo weit mechanicè, ſeine Richtigkeit haben kan, ſo iſt doch hingegen zuwiſſen, daß wenn es etwas genauer berechnet wird.

12 — $\surd\,108. = 1.\frac{6076951544}{10000000000}$ hingegen
14 — $\surd\,153\,\frac{910751}{1600000} = 1.\frac{6076951548}{10000000000}$ bringt,
Alſo ein Unterſcheid von $\frac{4}{10000000000}$ ſich hervor thut. Weßhalben ſolche Operation wohl

me-

mechaniſch, hingegen aber vor geometriſch keinesweges paſſiren kan.

Da nun dergleichen unendliche rational-Linien AC anzugeben, ſo iſt doch nicht möglich, unter ſo vielen eine einige zufinden, welche in Zahlen der 12. — √ 108. geometricè gleich käme.

Dahero bleibt nochmahln der Schluß. Daß mit einer reſidual Linie CB, nur eine rational Linie AC (welche mit der gantzen AB allein in Macht ermeßlich) übereinkomme, oder an CB könne gefüget werden.

Nota, Es können auch 2 reſidua, geometricè gleicher Gröſſe ſeyn, und gleichwohl aus ungleichen Nahmen oder Theilen beſtehen.

Jedoch iſt hierbey warzunehmen, daß gleich groſſe binomia, nicht gleich groſſe reſidua gebähren oder hervor bringen. Zum Exempel, Beyde gleich groſſe binomia √108 + √12 und √75. + √27. wären deren Reſidua √108 — √12 — √75 — √24. Dieſe beyde reſidua ſeynd alſo einander nicht gleich, wohl aber verwechſelt, nemlich √108 — √27 und √75 — √12 ſeynd geometrice gleicher Gröſſe, welches leicht zu probiren.

Die 81. Propoſition.

Mit einer Medial reſidual CB, komt nur eine rechte Medial-Linie AC, (welche mit der gantzen AB allein in Macht ermeßlich, und AB mit AC ein Rectangu-

gulum rationale beſchlieſſet,) überein, oder kan daran (nemlich an CB) gefüget werden.

Erklärung.

Diß iſt vice verſa vorhergehende 44. Prop. Man laſſe demnach die gantze AB $\surd\surd 72$. und die Medial AC $\surd\surd 18$ ſeyn. So wird die Medial reſidual CB $\surd\surd 72 - \surd\surd 18$ halten, auch AC $\surd\surd 18$. mit AB $\surd\surd 72$. allein in Macht ermeßlich ſeyn, ingleichen AB mit AC ein rational-Rectangulum AE 6. beſchlieſſen.

Beweiß.

Man füge an CB eine andere Medial, zum Ex. DC $\surd\surd 288$. So wird DA (nemlich AC von DC ſubtrah.) $\surd\surd 18$. und die gantze DB $\surd\surd 72 + \surd\surd 18$. (nemlich AB $\surd\surd 72$. zu DA $\surd\surd 18$. addirt) halten. Folglich CB $\surd\surd 72 + \surd\surd 18 - \surd\surd 288 =$ ſeyn $\surd\surd 72 - \surd\surd 18$. Es kan dieſem nach an die Medial reſidual CB, wohl eine andere rechte Linie DC alſo gefüget werden, daß DC $\surd\surd 288$ mit der gantzen DB $\surd\surd 72 + \surd\surd 18$. einiger maaßen in Macht ermeßlich. Dahingegen DB $\surd\surd 72 + \surd\surd 18$ mit DC $\surd\surd 288$ multipl. $12 + \surd 72$. hervor bringet. Welches kein rational-Rectangulum iſt, oder genennet werden kan. Dahero auch an dieſe Medial reſidual CB $\surd\surd 72 - \surd\surd 18$. keine andere Medial, alſo nur AC $\surd\surd 18$. anzufügen iſt.

Die

Die 82. Propoſition.

An eine Second Medial reſidual-Linie CB, kan nur eine Medial rechte Linie AC (ſo mit der gantzen AB allein in Macht ermeßlich, und AB mit AC ein Rectang. Medium beſchlieſſet,) gefüget werden.

Erklärung.

Hier iſt vorhergehende 45. Prop. vice verſa zu verſtehen, auch ſelbige Figur mit in Betrachtung zu ziehen.

Man laſſe demnach die gantze AB $\sqrt{\sqrt{600}}$. und die Medial AC $\sqrt{\sqrt{24}}$ ſeyn. So wird die Second Medial reſidual CB $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{\sqrt{24}}$ halten. Dieſe CB iſt dann mit der gantzen AB allein in Macht ermeßlich, und AB mit AC multiplicirt, bringt AF ein Rectang. Medium $\sqrt{120}$ hervor.

Beweiß.

Man füge an die Second Medial reſidual Linie CB, eine andere Medial-Linie, zum Ex. DC $\sqrt{\sqrt{384}}$. ſo wird DA (nemlich AC von DC ſubtrah.) $\sqrt{\sqrt{24}}$. und die gantze DB (AB + DA) $\sqrt{\sqrt{600}}+\sqrt{\sqrt{24}}$ halten. Folglich CB $\sqrt{\sqrt{600}}+\sqrt{\sqrt{24}}-\sqrt{\sqrt{384}}$. der Second Medial reſidual CB $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{\sqrt{24}}$ gleich ſeyn.

Es

Es an alſo dieſem nach an die Second Medial reſidual Linie CB, wohl eine andere rechte Linie DC gefüget werden, welche DC √√ 384. mit der gantzen DB √√ 600 + √√ 24. einiger Maßen in Macht ermeßlich ſey. Dahingegen DB mit DC multipl. √480 + √96. hervor bringet, welches vermöge der Prop. ein Rectang. Medium ſeyn ſolte, dergleichen aber nicht iſt, oder genennet werden kan. Dahero auch an die Second Medial reſidual CB √√ 600 − √√ 24. keine andere Medial, als nur AC √√ 24 anzufügen iſt.

Die 83. Propoſition.

Zu einer kleinen Linie (Minor) CB, kan nur eine rechte Linie AC (welche zu der gantzen AB in Macht unermeßlich, und die Quadrata AB und AC zuſammen addirt, eine rational-Fläche austragen, ingleichen AB mit AC ein Rectang. Medium ausmachet,) angefüget werden, oder mit ſelbiger überein kommen.

Erklärung.

Hierunter iſt vice verſa vorherg. 46. Propoſ. zu verſtehen, auch die daſelbſt befindliche Figur und Procedur einiger Maaßen mit in Betrachtung zu ziehen.

Man

Man laſſe demnach die gantze AB $\surd{:}6+\surd 10$. und die rechte Linie AC $\surd{:}6-\surd 10$ ſeyn. So wird die linea Minor CB $\surd{:}6+\surd 10-\surd{:}6-\surd 10$ halten. Dieſe CB iſt dann mit der gantzen AB in Macht unermeßlich/ und die Quadrata AB $6+\surd 10$ und AC $6-\surd 10$ zuſammen addirt, geben eine rational-Fläche 12. ingleichen AB $\surd{:}6+\surd 10$ mit AC $\surd{:}6-\surd 10$ mult. beſchlieſſet ein Rectang. Medium AG $\surd 26$.

Beweiß.

Man füge an die linea Minor CB eine andere rechte Linie, per Ex. DC $\surd{:}54-\surd 810$. So wird DA (nemlich AC von DC ſubtrahirt,) $\surd{:}24-\surd 160$. und die gantze DB (das iſt AB + DA) $\surd{:}6+\surd 10+\surd{:}24-\surd 160$ halten. Folglich CB $\surd{:}6+\surd 10+\surd{:}24-\surd 160-\surd{:}54-\surd 810$. der Linea Minor $\surd{:}6+\surd 10-\surd{:}6-\surd 10$. gleich ſeyn.

Hieraus erhellet, daß zwar an die Linie Minor CB, wohl eine andere rechte Linie DC angefüget werden könne. Dahingegen DB mit DC multiplicirt, $\surd 234+\surd{:}1656-\surd 1866240$. hervor bringet. Welches der Propoſition gemäß ein Rectang. Medium ſeyn ſolte, ſo es aber nicht iſt, oder genennet werden kan. Dahero auch an die linea Minor CB $\surd{:}6+\surd 10-\surd{:}6-\surd 10$. keine andere rechte Linie, als nur AC $\surd{:}6-\surd 10$ allein anzufügen iſt.

Die

Die 84. Propoſition.

Zu einer Linie cum rationali Medium totum efficiens CB, kan nur eine rechte Linie *A*C (welche zu *A*B in Macht incommenſurabel, und die von *A*B und AC addirten Quadrata ein Rectang. Medium, ingleichen das von *A*B mit *A*C beſchloſſene Rectangulum ein rationale hervor bringet,) angefüget werden, oder mit ſelbiger überein kommen.

Erklärung.

Hier iſt vorherg. 47. Prop. vice verſa zu verſtehen, auch die daſelbſt befindliche Figur zugleich mit in Betrachtung zu ziehen.

Man laſſe demnach die gantze Linie AB $\sqrt{:}$ $\sqrt{54}+\sqrt{18}$. und AC $\sqrt{:}\sqrt{54}-\sqrt{18}$ ſeyn. So wird die Linie cum rationale medium totum efficiens CB $\sqrt{:}\sqrt{54}+\sqrt{18}-\sqrt{:}\sqrt{54}-\sqrt{18}$ halten. Dieſe CB iſt dann mit der gantzen AB in Macht unermeßlich, und die Quadrata von AB und AC zuſammen addirt, bringen $\sqrt{216}$. ein Rectang. Medium. Ingleichen das von AB und AC beſchloſſene Rectang. AH giebt 6. ein rationale.

Beweiß.

Könte es geſchehen, ſo füge man an die Linie CB eine andere rechte Linie, zum Ex. DC $\sqrt{:}$ $\sqrt{864}-\sqrt{288}$. So wird DA $\sqrt{:}\sqrt{54}$ $-\sqrt{}$

$-\sqrt{18}$. und die gantze DB $\sqrt{}:\sqrt{54}+\sqrt{18}+\sqrt{}:\sqrt{54}-\sqrt{18}$ halten. Folglich CB $\sqrt{}:\sqrt{54}+\sqrt{18}+\sqrt{}:\sqrt{54}-\sqrt{18}-\sqrt{}:\sqrt{864}-\sqrt{288}$. der Linie cum rationali medium totum efficiens CB $\sqrt{}:\sqrt{54}+\sqrt{18}-\sqrt{}:\sqrt{54}-\sqrt{18}$. gleich ſeyn.

Hieraus erhellet, daß zwar an die linie CB, cum rationali medium totum efficiens, wohl eine andere rechte Linie DC, angefüget werden könne. Dahingegen DB□ und DC□, zuſammen addirt $\sqrt{1944}-\sqrt{288}$ hervor bringet, ſo doch der Propoſition gemäß, ein Rectangulum Medium ſeyn ſolte, dergleichen aber nicht iſt, noch genennet werden kan. Dahero auch an dieſe Linie cum rationali medium totum efficiens CB $\sqrt{}:\sqrt{54}+\sqrt{18}-\sqrt{}:\sqrt{54}-\sqrt{18}$. keine andere rechte Linie, als nur AC $\sqrt{}:\sqrt{54}-\sqrt{18}$ anzufügen iſt, oder mit ſelbiger überein kommen kan.

Die 85. Propoſition.

Zu einer Linie cum medio Medium totum efficiens kan nur eine rechte Linie *A* C, (welche zu der gantzen *A* B in Macht unermeßlich. Und beyde quadrata von *A* B und *A* C zuſammen addirt, eine Medial-Fläche, auch das von *A*B und *A* C beſchloſſene Rectangulum, ein Rect. Medium ausmachen, ſo mit beyden ad-

dir-

dirten Quadraten unermeßlich,) angefüget werden, oder mit ſelbiger überein kommen.

Erklärung.

Hier iſt ebener maaßen vorherg. 48. Prop. vice verſa zu verſtehen, auch umb deßwillen dortige Figur mit zu betrachten.

Man laſſe demnach die gantze AB $\sqrt{}:\sqrt{18}+\sqrt{12}$. und AC $\sqrt{}:\sqrt{18}-\sqrt{12}$ ſeyn. So wird die Linie cum medio medium totum efficiens CB $\sqrt{}:\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{}:\sqrt{18}-\sqrt{12}$. halten. Dieſe CB iſt dann mit der gantzen AB in Macht unermeßlich, und die Quadrata von AB und AC zuſammen addirt, bringen $\sqrt{72}$. ein Rect. Medium. Auch AB mit AC multipl. bringt $\sqrt{6}$. ebenfalls ein Rectang. Medium, welches mit vorigen $\sqrt{72}$ (in Länge) unermeßlich.

Beweiß.

Könte es geſchehen, ſo füge man an die Linie CB, eine andere rechte Linie, zum Ex. DC $\sqrt{}:\sqrt{288}-\sqrt{192}$. So wird DA $\sqrt{}:\sqrt{18}-\sqrt{12}$. und die gantze DB $\sqrt{}:\sqrt{18}+\sqrt{12}+\sqrt{}:\sqrt{18}-\sqrt{12}$. halten. Folglich CB $\sqrt{}:\sqrt{18}+\sqrt{12}+\sqrt{}:\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{}:\sqrt{288}-\sqrt{192}$. der Linie cum medio medium totum efficiens CB $\sqrt{}:\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{}:\sqrt{18}-\sqrt{12}$. gleich ſeyn.

Hieraus erhellet, daß zwar an die Linie cum me-

medio medium totum efficiens CB, wohl eine andere rechte Linie DC, angefüget werden könne. Dahingegen die beyden Quadrata von DB und DC zuſammen addirt, $\surd 648 - \surd 192$. hervor bringen, ſo doch vermöge dieſer Prop. ein Rectang. Medium ſeyn ſolte, dergleichen aber nicht iſt, noch genennet werden kan.

Dahero auch an dieſe Linie cum medio medium totum efficiens CB $\surd: \surd 18 + \surd 12 - \surd: \surd 18 - \surd 12$. keine andere rechte Linie, als nur AC $\surd: \surd 18 - \surd 12$. allein angefüget werden, oder mit ſelbiger überein kommen kan.

Numehro folgen

Dieſes 10ten Buchs dritte Definitiones,

Oder Beſchreibung derer 6 reſiduorum, da eine rechte Linie, mit ihrem reſiduo zu beſchreiben vorgeſtellet wird, als nemlich:

1. Wenn eine rational Linie AB 12. in C alſo getheilet wird, daß derer quadrata AB und AC ihr Unterſcheid ($\surd 64$) eine rational quadrat-Zahl ſey. So wird (wenn man AC $\surd 80$ von AB 12 weg nimt) der Reſt CB ($12 - \surd 80$) das Erſte reſiduum genennet.

2. Wenn aber AB $\surd 180$. irrational, und alſo zertheilt wird. Daß AC 10 rational, und derer quadraten AB und AC Unterſcheid $\surd 80$. mit der gantzen AB ermeßlich. So wird (wenn man AC von AB wegnimt) der Reſt CB $\surd 180 - 10$. das zweyte reſiduum genennet.

3. Iſt AB $\sqrt{128}$ irrational, auch AC $\sqrt{56}$ irrational. Und ſolcher Quadraten Unterſcheid $\sqrt{72}$. mit der gantzen AB $\sqrt{128}$. in Länge ermeßlich, (nemlich hier wie 3. gegen 4.) So wird der Reſt CB $\sqrt{128} - \sqrt{56}$. das dritte reſiduum genennet.

4. Wenn AB 12 rational, AC aber $\sqrt{96}$ irrational. Und derer Quadrata Unterſcheid $\sqrt{48}$. mit der gantzen AB in Länge unermeßlich. So wird der Reſt CB $12 - \sqrt{96}$. das vierte reſiduum genennet.

5. Iſt AB $\sqrt{24}$. irrational, AC 4 aber rational. Und derer Quadrata Unterſcheid $\sqrt{8}$. mit der gantzen AB in Länge unermeßlich. So wird der Reſt CB $\sqrt{24} - 4$. das fünffte reſiduum genennet.

6. Iſt AB $\sqrt{45}$. und auch AC $\sqrt{18}$. alſo beyde irrational. Und deren Quadrata Unterſcheid $\sqrt{27}$. mit der gantzen AB in Länge unermeßlich. So wird der Reſt CB $\sqrt{45} - \sqrt{18}$. das ſechſte reſiduum genennet.

Nota. Da nun die jetzt beſchriebene oder definirte 6. reſidua, ihren Urſprung von denen allbereit vorhero nach der 48. Propoſition angeführten und erklärten 6. binomiis haben. Als iſt auch dieſe Arbeit vice verſa mit jenen einerley, und nur in deme unterſchieden: Daß wenn dort bey denen binomiis beyde Nahmen oder Theile addirt worden, hier bey denen reſiduis dagegen allezeit der kleinere Nahme oder Theil, von dem grös-

gröſſern oder gantzen, ſubtrahiret wird. Wie dann dieſer Urſach halben, eben vorhergehende binomia, die reſidua damit zu beſchreiben erwehlet werden. Und ſtehen ermeldte 6. Binomia mit ihren reſiduis in folgender Ordnung:

	Binomia.	Reſidua.
Das erſte	$12 + \sqrt{80}$.	$12 - \sqrt{80}$.
Das zweyte	$\sqrt{180} + 10$.	$\sqrt{180} - 10$.
Das dritte	$\sqrt{128} + \sqrt{56}$.	$\sqrt{128} - \sqrt{56}$.
Das vierte	$12 + \sqrt{96}$.	$12 - \sqrt{96}$.
Das fünffte	$\sqrt{24} + 4$.	$\sqrt{24} - 4$.
Das ſechſte	$\sqrt{45} + \sqrt{18}$.	$\sqrt{45} - \sqrt{18}$.

Die Findung dieſer 6. reſiduorum oder wie ein jedes reſiduum zu berechnen, ſolte in jetzt folgender 86. 87. 88. 89. 90. und 91. Propoſition, jedes beſondern abgehandelt werden, welches aber durch jetzt vorherbeſchehene Erläuterung allbereit des mehrern erfolget, und ferner hin deſto behender auf eins zu verrichten seyn wird. Nehmlich:

Die 86. 87. 88. 89. 90 und 91 Propoſition.

Das Erſte, Zweyte, Dritte, Vierte, Fünffte und Sechſte apotome oder reſiduum zufinden.

Erklärung.

Es iſt dieſe Arbeit erwehnter maſſen vorhergehender

hender 49. 50. 51. 52. 53 und 54 Prop. gantz conform.

Zum Exempel das Erſte reſiduum zufinden.

A 9.
B 4.
C 5.
D 12.
E $\surd$ 144.

Operatio.

Man nehme 2 quadrat-Zahlen A und B alſo: daß deren differentz C, keine quadrat Zahl ſey. Ferner werde auch nach Gefallen genommen, (nur keine quadrat Zahl) eine rational Zahl D 12. deren quadrat iſt E 144.

Nun rechne

wie A zu E alſo C zum ſuchenden Theil

9 $\surd$ 144 5

komt $\surd$ 80 dis ſubtrahire von der rational Zahl D 12. ſo komt 12 — $\surd$ 80 vor das begehrte Erſte reſiduum.

Erklärung und Beweiß.

Man betrachte vorhergehende 49 Propoſition, ſo wird ſich dieſe Arbeit mit jener gantz gleich finden. Folglich iſt auch der Beweiß einerley, und dahero noch einmahl zu verrichten nur unnöthig.

Auf dergleichen Art nun werden auch die übrigen 5 reſidua nach vorhergehender 50. 51. 52. 53 und 54 Propoſition gefunden und bewieſen.

Die 92. Propoſition.

Wenn eine Fläche A B C D von einer rational Linie A D, und dem erſten reſiduo

duo AB beſchloſſen. So wird die rechte Linie EF, welche die Fläche AC vermag, ein reſiduum ſeyn.

Erklärung.

Die rational ſey AD 3. und AB 6 — √20 ein Erſtes reſiduum. Dieſemnach wird der Inhalt von AC ſeyn 18 — √180 = dem quadrat EG.

Beweiß.

Weil AB mit AC in gleicher Verhältnüs (nehmlich wie 1. gegen 6) ſo wird [67. 10.] AC eben dergleichen Ordnung ein reſiduum, als AB ſeyn.

Anhang.

Dieſe Propoſition will ſo viel ſagen. Daß wenn ein reſiduum mit einer Zahl multipl. wird, ſolches eben dergleichen reſiduum (der Ordnung) wieder hervorbringet. Welches folgende 104. 105. 106. 107 und 108 Prop. des mehrern anzeigen werden. Und dieſes iſt nicht allein von einem reſiduo, ſondern generaliter von allen irrational Linien alſo zu verſtehen. Denn eine iede irrational Linie, mit einer Zahl multiplicirt, kan anders nicht, als eben wieder dergleichen irrational Linie (mit jener in gleicher Proportion, alſo in Länge ermeßlich) hervor bringen.

Die 93. Propoſition.

Wenn eine Fläche ABCD, von einer rational Linie AD, und dem zweyten reſiduo

ſiduo AB beſchloſſen. So wird die rechte Linie EF (ſo dieſe Fläche ABCD vermag) die Erſte Medial reſidual ſeyn.

Erklärung

Es ſey die rational AD 1. und das zweyte reſiduum AB $\surd 180 - 10$. Dieſemnach iſt der Inhalt von AC $\surd 180 - 10$ = dem Quadrat EG. Dahero die Seite dieſes Quadrats EF $\surd : \surd 180 - 10$ die Erſte Medial reſidual Linie iſt. (nemlich: das Medium proportionale zwiſchen einer rational und reſidual Linie.)

Beweiß.

Es iſt hier vorherg. 56. Prop. wieder mit in Betrachtung zuziehen, als welche vice verſa zuverſtehen, und alſo mit dortigen Beweiß auf eins hinaus laufet. Umb welcher Urſach willen, damit es jenem conform bleibe, auch hier wiederumb die rational-Linie AB 1. geſtellet worden, in dem es ſonſt gleich viel gilt, wie auch ſelbige etwa genommen werden möge. Alſo findet ſich und iſt [Anhang 56, 10.] bewieſen, daß eine Erſte bimedial $\surd : 180 + 10$. ſey. gleich wie hier ebenfals zu einer Erſten Medial reſidual $\surd : \surd 180 - 10$ hervorkommet. Und alſo dadurch ſeine Richtigkeit erlanget.

Die 94. Propoſition.

Wenn eine Fläche ABCD, von einer rational-Linie AD und dem Dritten reſiduo

ſiduo *AB* beſchloſſen. So wird die rechte Linie EF, welche die Fläche ABCD vermag, die Zweyte Medial reſidual-Linie ſeyn.

Erklärung.

AD ſey 1. und das Dritte reſiduum AB $\sqrt{128} - \sqrt{56}$. Dieſemnach wird der Inhalt AC $\sqrt{128} - \sqrt{56}$ = dem Inhalt EG. Und alſo EF $\sqrt{:}\sqrt{128} - \sqrt{56}$. die begehrte Zweyte Medial reſidual-Linie ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt vorhergeh. 57. Prop. vice verſa, und alſo daſelbſt [Anhang 57 10.] albereit bewieſen, daß $\sqrt{:}\sqrt{128} + \sqrt{56}$. die zweyte bimedial-Linie, alſo iſt hier gleicherweiſe $\sqrt{:}\sqrt{128} - \sqrt{56}$ die zweyte Medial reſidual-Linie EF.

Die 95. Propoſition.

Wenn eine Fläche ABCD, von einer rational-Linie AD, und dem vierten reſiduo AB beſchloſſen. So wird die rechte Linie EF, welche dieſe Fläche ABCD vermag (Minor) oder eine kleine Linie ſeyn.

Erklärung.

AD ſey 1. und das Vierte reſiduum AB $6 - \sqrt{24}$. Dieſemnach wird der Inhalt AC $6 - \sqrt{24}$. = dem Inhalt EG. Und alſo EF $\sqrt{;}6 - \sqrt{24}$ die begehrte kleine Linie (Minor) ſeyn.

Beweiß.

Gleichwie dieſes wiederum vice verſa vorherg. 58. Prop. alſo findet ſich [Anhang. 58. 10.] daß dort linea Major $\surd{:}6+\surd 24$ hier dagegen linea Minor $\surd{:}6-\surd 24$ ſey.

Die 96. Propoſition.

Wenn eine Fläche ABCD, von einer rationa-Linie AD, und dem Fünfften reſiduo AB beſchloſſen. So wird die rechte Linie EF, welche die Fläche ABCD vermag, diejenige Linie ſeyn, welche mit der rational eine gantze Medial-Fläche ausmachet (que cum rationali, medium totum efficit.)

Erklärung.

Es ſey die rational-Linie AD 1. und das Fünffte reſiduum AB $\surd 24-4$. Dieſemnach wird der Inhalt AC, $\surd 24-4=$ dem Inhalt EG. Und alſo EF, $\surd{:}\surd 24-4$. die begehrte, eine mit dem rationale gantzes Medium ausmachende (cum rationali Medium totum efficiens) Linie ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt vice verſa vorherg. 59. Propoſit. woſelbſt ſich findet [Anh. 59. 10.] daß $\surd{:}\surd 24+4$. dort Media potens, und hier dagegen deſſen reſiduum EF $\surd{:}\surd 24-4$ (cum rationali Medium totum efficiens) ſey.

Die

Die 97. Propoſition.

Wenn eine Fläche ABCD, von einer rational-Linie AD, und dem ſechſten reſiduo AB beſchloſſen. So wird die rechte Linie EF, welche dieſe Fläche ABCD vermag, eine mit der Medial gantzes Medium austragende (cum Medio Medium totum efficiens) Linie ſeyn.

Erklärung.

Es ſey die rational-Linie AD 1. und das ſechſte reſiduum AB $\sqrt{45} - \sqrt{18}$. Dieſemnach wird der Inhalt AC $\sqrt{45} - \sqrt{18}$ = dem Inhalt EG Und alſo EF $\sqrt{:\sqrt{45} - \sqrt{18}}$ die begehrte eine mit der Medial gantzes Medium austragende Linie ſeyn.

Beweiß.

Es iſt dieſes vice verſa vorhergeh. 60. Propoſition. Und alſo findet ſich daſelbſt [Anh. 60. 10.] daß $\sqrt{:\sqrt{45} + \sqrt{18}}$. bina media potens, und hier dagegen deſſen reſiduum EF, $\sqrt{:\sqrt{45} - \sqrt{18}}$. cum Medio Medium totum efficiens, ſey.

Anhang.

Bishieher kan man eigentlich gewahr werden, nicht allein, woher die 13 differirende irrational Linien ihren Anfang genommen, ſondern auch, wie ſelbige ſich gegen einander verhalten, und immer die eine aus der andern hervor komme.

Die 98. Propoſition.

Das Quadrat A C eines reſidui A D, an eine rational Linie E F applicirt oder gebracht, bringt die Breite EH, ein Erſtes reſiduum wieder hervor.

Erklärung.

Das Residuum AD ſey $\sqrt{45} - \sqrt{18}$ und die rational-Linie EF 2. Dieſem nach komt des Quadrats AC Inhalt $63 - \sqrt{3240}$. Und ſo viel wird dann auch das rectangulum EG halten. Dahero ſolchen Inhalt mit der rational EF 2 abdividirt, bringt $31\frac{1}{2} - \sqrt{810}$, vor EH, welches ein Erſtes reſiduum iſt.

Beweiß.

Das Quadrat $\sqrt{810}$. von quadrat $31\frac{1}{2}$ (nemlich $\sqrt{992\frac{1}{4}}$) ſubtrahirt, reſtirt $\sqrt{182\frac{1}{4}}$ ſo eine rational Quadrat-Zahl, deren Radix iſt $13\frac{1}{2}$. Dieſemnach iſt [1. def. 85. 10.] EH, ein Erſtes reſiduum.

Die 99. Propoſition.

Das Quadrat AC, von einer Erſten medial reſidual Linie AD, an eine rational Linie EF applicirt oder gebracht, bringt die Breite EH, des zweyten reſidui wieder hervor.

Er-

Erklärung.

Dis iſt vice verſa vorhergehende 93. Prop. Es ſey dahero [93. 10.] die Erſte Medial reſidual AD √: √180 — 10. Und die rational Linie EF, 1. Dieſem nach komt das Quadrat AC √180 — 10. ſo viel wird auch das rectangulum EG halten. Dahero ſolchen Inhalt √180 — 10 mit EF 1. abdividirt, giebt √180 — 10 vor EH, welches ein zweytes reſiduum iſt.

Beweiß.

Das Quadrat von 10 nemlich √100. von √180 ſubtrahirt, reſtirt √80, welche √80 mit √180 in Länge ermeßlich, und dahero [2 def. 85 10.] iſt EH ein zweytes reſiduum.

Nota, Warum hier EF 1. genommen worden, iſt albereit bey vorherg. 55 Prop. angemerckt zufinden.

Die 100. Propoſition.

Das Quadrat AC, von einer Second Medial reſidual Linie AD, an eine rational Linie EF applicirt. Bringt die Breite EH, das Dritte Reſiduum wieder hervor.

Nota, dis iſt vice verſa vorherg. 94. Prop.

Erklärung.

Die Second medial reſidual AD ſey [94. 10.] √: √128 — √56. und die rational Linie EF 1. Dieſemnach komt des Quadrats AC Inhalt √128.

128 — √56. Und ſo viel wird auch das rectangulum EG halten. Dahero ſolchen Inhalt √ 128 — √56. mit EF 1. abdividirt, giebt √ 128 — √56 vor EH, welches ein Drittes reſiduum iſt.

Beweiß.

Des reſidui EH beyde Nahmen ſeynd irrational, und die Differentz √72 mit dem gröſſern Theil in Länge ermeßlich. Und dieſen nach EH [3 def. 85. 10.] ein Drittes reſiduum.

Die 101. Propoſition.

Das Quadrat AC der Linie Minor AD, an eine rational Linie EF applicirt, bringt die Breite EH, ein Viertes reſiduum wieder hervor.

Nota, dis iſt vice verſa vorherg. 95. Prop.

Erklärung.

Die Linie Minor AD ſey [95. 10.] √: 6 — √24. und die rational Linie EF 1. Dieſem nach komt des Quadrats AC Inhalt 6 — √24. So viel wird auch das rectang EG halten. Dahero ſolchen Inhalt 6 — √24 mit EF 1. abdividirt, giebt 6. — √24. vor EH, welches ein Viertes reſiduum ſeyn wird.

Beweiß.

Des reſidui EH gröſter Theil oder Nahme iſt rational 6. der kleinere aber √24. irrational. Und die differentz √12 mit dem gröſſern Theil 6.

in Länge nicht ermeßlich. Weßwegen [4 def. 85. 10.] EH ein Viertes reſiduum iſt.

Die 102. Propoſition.

Das Quadrat AC der Linie cum rationali medium totum efficiens AD, an eine rational Linie EF appliciret. Bringt die Breite EH ein fünfftes reſiduum wieder hervor.

Nota, iſt vice verſa vorherg. 96. Prop.

Erklärung.

Die Linie cum rationali medium totum efficiens AD ſey [96. 10.] √: √24 − 4. und die rational Linie EF 1. Dieſem nach komt des Quadrats AC Inhalt √24 − 4. Und ſo viel wird auch das rectangulum EG halten. Dahero ſolchen Inhalt √24 − 4. mit EF 1. abdividirt, giebt √24 − 4 vor EH, ſo ein fünfftes reſiduum ſeyn wird.

Beweiß.

Des reſidui EH beyder Theile oder Nahmen Unterſchied √8 iſt mit dem gröſſern irrationalen Theil √24 in Länge nicht ermeßlich. Weßwegen EH √24 − 4 [5 def. 85. 10] ein fünfftes reſiduum.

Die 103. Propoſition.

Das Quadrat AC der Linie cum medio medium totum efficiens AD an eine

ne rational Linie E F applicirt, bringt die Breite E H, ein ſechſtes reſiduum wieder hervor.

Nota, dis iſt vice verſa vorherg. 97 Prop.

Erklårung.

Die Linie cum medio medium totum efficiens AD ſey [97. 10.] √:√ 18 — √ 12. Und die rational Linie EF 1. Dieſem nach komt des quadrats AC Inhalt √ 18 — √ 12. Und ſo viel wird auch das rectang. EG halten. Dahero ſolchen Inhalt √ 18 — √ 12. mit EF 1. abdividirt, giebt √ 18 — √ 12 vor EH, ſo ein Sechſtes reſiduum ſeyn wird.

Beweiß.

Des reſidui EH, beyde Nahmen ſeynd irrational, und die Differentz √ 6. mit dem gröſſern Theil √ 18 in Långe nicht ermeßlich. Weßwegen EH √ 18 — √ 12 [6 def. 85. 10] ein ſechſtes Reſiduum.

Die 104. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie BC, mit einem reſiduo E F in Långe ermeßlich iſt. So wird ſolche Linie B C auch ein reſiduum, und zwar von eben dergleichen Ordnung ſeyn.

Nota, hier iſt vorherg. 67. Prop. vice verſa zu verſtehen.

Er-

Erklärung.

Das residuum EF ſey 8 — $\surd$28 Dieſemnach wird DF 8. und DE $\surd$28. halten. Nun gelte nach gefallen AC 16. Dann mache, wie DF 8 zu AC 16. alſo DE $\surd$28 zu AB, komt vor AB $\surd$112. Bey ſolcher Bewandnüs wird BC 16 — $\surd$112 auch ein residuum, und zwar mit dem residuo EF 8 — $\surd$28 von gleicher Ordnung seyn.

Beweiß.

AC ſtehet gegen DF mit allen und ieden Theilen, in gleicher Verhältnüs, wie 2 gegen 1. Dahero in Länge ermeßlich. Und da EF [1. def. 85. 10.] ein Erſtes residuum, ſo iſt wegen dergleichen Verhältnüs [6 und 7. ax. 1.] BC 16 — $\surd$112. auch ein Erſtes residuum.

Die 105. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie BC commenſurabel zu einer Medial reſidual Linie EF. So iſt BC ebenfals eine Medial reſidual Linie, und zwar von ſelbiger Ordnung.

Nota, Dis iſt vice verſa vorherg. 68 Prop.

Erklärung.

Es ſey [68. 10.] die EF eine Erſte Medial reſidual $\surd\surd$72 — $\surd\surd$18. Dahero wird DF $\surd\surd$72 und DE $\surd\surd$18 halten. Nun gelte nach gefallen AC $\surd\surd$1152. Dann mache, wie DF $\surd\surd$

$\surd\surd 72$ zu AC $\surd\surd 1152$. alſo DE $\surd\surd 18$ zu AB, komt vor AB $\surd\surd 288$. Dieſemnach wird BC $\surd\surd 1152 - \surd\surd 288$ auch eine Medial reſidual, und zwar iegliche Mediæ apotome prima ſeyn.

Beweiß.

AC ſtehet mit allen und ieden Theilen gegen DF, in gleicher Verhältnüs wie 2 gegen 1. Dahero commenſurabel oder in Länge ermeßlich. Und da EF [75. 10.] Media apotome prima, ſo iſt wegen gleicher Verhältnüs [6 und 7. ax. 1.] BC $\surd\surd 1152 - \surd\surd 288$. auch Mediæ apotome prima.

Die 106. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie BC commenſurabel, zu einer Linie Minor EF. So iſt BC ebenfals eine linea Minor.

Nota, Dis iſt vice verſa, vorherg. 69. und 77. Propoſition.

Erklärung.

Es ſey [77. 10.] Minor EF $\surd{:}32 + \surd 384 - \surd{:}32\surd - 384$. Dahero wird DF $\surd{:}32 + \surd 384$ und DE $\surd{:}32 - \surd 384$ halten.

Nun gelte nach gefallen AC $\surd{:}8 + \surd 24$. Dann mache wie DF $\surd{:}32 + \surd 384$ zu AC $\surd{:}8 + \surd 24$. alſo DE $\surd{:}32 - \surd 384$. zu AB komt vor AB $\surd{:}8 - \surd 24$. Dieſem nach wird BC $\surd{:}8 + \surd 24 - \surd{:}8 - \surd 24$. auch Minor ſeyn.

Be-

Beweiß.

AC ſtehet mit allen und ieden Theilen gegen DF in gleicher Verhältnüs, wie 1 gegen 2 Dahero in Länge ermeßlich. Und da [77. 10.] EF $\surd : 32 + \surd 384 - \surd : 32 - \surd 384$. Minor. So iſt wegen gleicher Verhältnüs [6. und 7 ax. 1.] BC $\surd : 8 + \surd 24 - \surd : 8 - \surd 24$. auch Minor.

Die 107. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie BC commenſurabel zu einer Linie cum rationali medium totum efficiens EF. So wird BC ebenfals cum rationali Medium totum efficiens ſeyn.

Nota, Dis iſt vice verſa vorherg. 78 Prop.

Erklärung.

Es ſey [78. 10] cum rationali medium totum efficiens EF $\surd : \surd 54 + \surd 18 - \surd : \surd 54 - \surd 18$. So wird DF $\surd : \surd 54 + \surd 18$ und DE $\surd : \surd 54 - \surd 18$ halten. Nun gelte AC nach gefallen $\surd : \surd 4374 + \surd 1458$. Dann mache wie DF $\surd : \surd 54 + \surd 18$ zu AC $\surd : \surd 4374 + \surd 1458$. alſo DE $\surd : \surd 54 - \surd 18$. zu AB, komt vor AB $\surd : \surd 4374 - \surd 1458$. Dieſem nach wird BC $\surd : \surd 4374 + \surd 1458 - \surd : \surd 4374 - \surd 1458$. auch eine Linie cum rationali medium totum efficiens ſeyn.

Beweiß.

AC ſtehet mit allen und ieden Theilen gegen

DF in gleicher Verhältnüs, wie 3 gegen 1. Dahero commenſurabel. Und da [78.10.] EF cum rationali Medium totum efficiens. So iſt wegen gleicher Verhältnüs [6 und 7.ax. 1.] BC √: √4374 + √1458 − √: √4374 − √1458 ebenfals cum rationali medium totum efficiens.

Die 108. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie BC commenſurabel zu einer Linie cum medio medium totum efficiens EF. So wird BC ebenfals ſeyn cum medio medium totum efficiens.

Nota, dis iſt vice verſa vorherg. 79 Prop.

Erklärung.

Es ſey [79. 10.] EF cum medio medium totum efficiens √: √18 + √12 − √: √18 − √12 Dahero wird DF √: √18 + √12 und DE √: √18 − √12 halten. Nun gelte AC nach gefallen √: √288 + √192. Dann mache, wie DF √: √18 + √12. zu AC √: √288 + √192 alſo DE √: √18 − √12 zu AB. komt vor AB √: √288 − √192. Dieſemnach wird BC √: √288 + √192 − √: √288 − √192 auch eine Linie, cum medio medium totum efficiens, ſeyn.

Beweiß.

AC ſtehet gegen DF mit allen Theilen in gleicher

oder Verhältnüs wie 2 gegen 1. Dahero commenſurabel. Und da [79.10.] EF cum Medio Medium totum efficiens. So iſt wegen gleicher Verhältnüs [6. 7. ax. 1.] BC √: √288 + √192 − √: √288 − √192 ebenfals cum medio medium totum efficiens.

Die 109. Propoſition.

So man von einem rational rectang. ABCD, ein rectang. Medium EBCF abziehet. So wird die rechte Linie GH welche dem Reſt AEFD vermag, eine deren beyde irrational Linien ſeyn, nemlich: Entweder ein reſiduum, oder aber eine kleine Linie (Minor.)

Erklärung.

Hier iſt die vorherg. 92 und 95 Prop. vice verſa zuverſtehen nemlich:

1 Satz: Wenn man die Seite des rational rectanguli AB alſo theilet, daß durch AE ein erſtes reſiduum herfürkomme. So wird GH wieder ein erſtes reſiduum abgeben.

Zum Exempel AB ſey 12. und EB √80. AD halte 6.

Beweiß.

Dieſemnach bringet AE 12 − √80. ein erſtes reſiduum [85. 10. 1. def.] hervor, und wird das rational rectang. AC 72. ferner das abziehende oder wegnehmende rectang. Medium EC √2880.

Alſo der Reſt AF 72 — $\surd$ 2880. Und dahero GH $\surd$: 72 — $\surd$ 2880 ſeyn, welches [92. 10.] ein reſiduum und zwar der erſten Ordnung iſt.

2 Satz. Wenn man aber die Seite des rational rectang. AB alſo theilet, daß durch AE ein viertes reſiduum hervorkommet. So wird GH linea Minor abgeben.

Zum Ex. AB ſey 3 EB $\surd$ 6 AD halte 2.

Beweiß.

Dieſemnach bringet AE 3 — $\surd$ 6 ein viertes reſiduum [85. 10. 4. def.] hervor, und wird das rational rectang. AC 6. ferner das abziehende rect. Medium EC $\surd$ 24. Alſo der Reſt AF 6 — $\surd$ 24 und dahero GH $\surd$: 6 — $\surd$ 24 ſeyn, welches [95. 10.] eine kleine Linie (Minor) iſt.

Die 110. Propoſition.

Wenn man von einen Medial rectangulo AD, ein rational rectangulum BD ſubtrahirt. So wird die rechte Linie NO welche dem Reſt AE vermag, ſeyn, eine der beyden irrationalen, nemlich: entweder, die erſte Medial reſidual, oder aber die Linie cum rationali medium totum efficiens.

Erklärung.

Hier iſt wiederum vice verſa vorherg. 93 und 96. Prop. zu verſtehen, nemlich:

1 Satz. Wenn man des Medial rect. AD eine Seite

Seite AC in B alſo theilet, daß durch AB ein zweytes residuum hervor kommet. So wird NO, eine erſte Medial reſidual abgeben.

Zum Ex. AC ſey √ 180. BC 10. AF halte 1.

Beweiß

Dieſem nach bringet AB √ 180 — 10. ein zweytes reſiduum [85. 10. 2 def.] hervor, und wird das Medial rect. AD √ 180. ferner das ſubtrahirende rationale BD 10. Alſo der Reſt AE √ 180 — 10. folglich GH √: √ 180 — 10 ſeyn, welches [93. 10.] eine erſte Medial reſidual iſt.

2 Satz. Wenn man des Medial rectang. AD eine Seite AC in B alſo theilet: Daß durch AB ein fünfftes reſiduum hervor kommet. So wird NO ſeyn, cum rationali medium totum efficiens.

Zum Ex. AC ſey √ 24. BC 4. AF halte 1.

Beweiß.

Dieſemnach bringet AB √ 24 — 4 ein fünfftes reſiduum [85. 10. 5. def.] hervor, und wird das Medial rectang. AD √ 24. ferner das ſubtrahirende rationale BD 4. alſo der Reſt AE √ 24 — 4 folglich GH √: √ 24 — 4 ſeyn, welches [96. 10.] eine mit dem rationale gantzes Medium austragende, iſt.

Die III. Propoſition.

Wenn man ein rect. Medium BD von einem rect. Medio AD ſubtrahirt. (und beyde BD und AD incommenſurabel.) Die Linie NO ſo dem Reſt AE vermag,

 iſt

iſt eine der beyden irrationalen, entweder: Die andere Medial reſidual, oder aber eine Linie, cum medio medium totum efficiens.

Erklärung.

Dis iſt vice verſa vorherg. 94 und 97. Prop. nemlich:

1 Satz. Wenn man des rect. Med. A D eine Seite AC in B alſo theilet: daß durch AB ein drittes reſiduum hervor kommet. So wird NO eine zweyte Medial reſidual abgeben.

Zum Ex. AC ſey √ 128. BC √ 56. AF halte 1.

Beweiß.

Dieſemnach ſeynd beyde rectang. Media √ 128 und √ 56 incommenſurabel. Und AB bringet √ 128 − √ 56 ein Drittes reſiduum [85. 10. 3 def.] hervor Ferner wird das Medial rectang. AD √ 128. ingleichen das ſubtrahirende rectang. Medium BD √ 56. Alſo der Reſt AE √ 128 − √ 56, folglich GH √:√ 128 − √ 56 ſeyn, welches [94. 10.] eine Zweyte Medial reſidual iſt.

2 Satz. Wenn man aber des Medial rect. AD eine Seite AC in B alſo theilet: Daß durch AB ein ſechſtes reſiduum hervor kommet. So wird NO ſeyn, cum Medio Medium totum efficiens.

Zum Exempel, AC ſey √ 45. BC √ 18. und AF halte 1.

Be-

Beweiß.

Dieſemnach ſeynd beyde Medial rect. $\surd 45$. und $\surd 18$ incommenſurabel.

Und AB bringet $\surd 45 - \surd 18$ ein ſechſtes reſiduum [85. 10. 6 def.] hervor Ferner wird das Medial rect AD $\surd 45$. ingleichen das ſubtrahirende rect. Medium BD $\surd 18$. Alſo der Reſt AE $\surd 45 - \surd 18$. folglich GH $\surd : \surd 45 - \surd 18$. ſeyn, welches [97. 10] eine mit dem Medio gantzes Medium austragende, iſt.

Die 112. Propoſition.

Ein reſiduum BC kan nicht zugleich ein binomium ſeyn.

Erklärung und Beweiß.

Dis iſt ſonder viel weitläuffigen remonſtriren eine an ſich ſelbſt offenbare Warheit. Weiln ein reſiduum zu formiren, allezeit von der Gantzen AC ein Theil AB (in allewege mit AC incommenſurabel) weggenommen wird.

Da in Gegentheil ein binomium die gantze Linie AC erfordert oder bleibet, und nur in einen Punct B in 2 Nahmen oder Theile zertheilet wird. Dahero kan [9. axiom. 1] nimmermehr ein reſiduum, zugleich ein binomium ſeyn.

Nota, Hier were wieder, gleich vorhergeh 43 und 80. Propoſition eine beſondere ſubtilität zu erinnern, bleibet iedoch vor dismal ausgeſetzt.

Numehro

Werden wiederhohlet und benennet die 13. irrational

tional Linien, ſo gegen einander unterſchieden oder differiren als:

1. Mittel-Linie, (Media)
2. Binomium, (deren ſind 6 Arten).
3. Erſte bimedial.
4. Zweyte bimedial.
5. Groſſe Linie (Major.)
6. Media potens.
7. Bina Media potens.
8. Reſidual-Linie, (deren ſeynd auch 6. Arten)
9. Erſte Medial reſidual.
10. Zweyte Medial reſidual.
11. Kleine Linie (Minor.)
12. Eine mit dem rationale gantzes Medium austragende (cum rationali medium totum efficiens.)
13. Eine mit dem Medio gantzes Medium austragende (cum Medio Medium totum efficiens.)

Nota, Die Eigenſchafft ſolcher 13. differirenden irrational Linien, iſt albereit vorhero, durch beſchehene 14. Anmerckungen und dazu gehörigen Figuren ausführlich vorgeſtellet und erkläret worden, alſo hier zu wiederhohlen unnötig.

Die 113. Propoſition.

Das Quadrat einer rational Linie AB an ein binomium CE gefügt, macht die Breite CF eines reſidui, deſſen 2 Nahmen

men GF und GC mit des binomii CE 2. Nahmen oder Theilen, DE und DC commenſurabel. Es wird auch das reſiduum CF mit dem binomio CE in gleicher Ordnung ſtehen.

Erklärung.

Des Quadrats rational Linie ſey AB 2 und das binomium CE $\sqrt{6}+2$. Es werde ferner [28.6] das Quadrat AB an CE gebracht, woraus entſtehet das rectang. EF, deſſen Seite CF ein reſiduum $\sqrt{24}-4$.

Beweiß.

Des reſidui Theile GF $\sqrt{24}$ und GC 4. ſeynd mit des binomii Theilen DE $\sqrt{6}$ und DC 2. commenſurabel wie 2 gegen 1. Und das reſiduum CF iſt [85. 10. 5 def.] der fünfften Ordnung Dergleichen Ordnung iſt auch [48. 10. 5. def.] das binomium CE. Uber dis CE $\sqrt{6}+2$ mit CF $\sqrt{24}-4$ multipl. giebt dem Inhalt EF 4. gleich dem Inhalt des Quadrats von AB.

Nota, hier iſt zuſehen, wie überaus kurtz und deutlich der Beweiß in Zahlen zu abſolviren, welches in Linien eine ſehr mühſame Arbeit abgiebet, wobey manchen der Sinn gantz würblicht drüber werden ſolte.

Das reſiduum CF zufinden geſchiehet alſo: multipl. CE $\sqrt{6}+2$ mit ſeinem reſiduo $\sqrt{6}-2$ komt 2. Nun mache wie dieſer Inhalt 2 zum Inhalt des Quadrats AB 4. alſo das reſiduum $\sqrt{6}-$

2. zu CF. komt vor das begehrte reſiduum CF √24 -- 4.

Die 114. Propoſition.

Das Quadrat einer rational Linie AB an ein reſiduum CF gefüget, bringt die Breite CE ein binomium hervor, deſſen 2 Nahmen oder Theile DE und DC ſeynd mit des reſidui CF 2 Nahmen oder Theilen GF und GC commenſurabel. Es wird auch das binomium CE mit dem Reſiduo CF in gleicher Ordnung ſtehen.

Erklärung und Beweiß.

Iſt wie deutlich zu erkennen, eben vorhergeh. 113 Propoſ vice verſa, dahero ſchon bewieſen, und leicht nach zu probiren.

Die 115. Propoſition.

Wenn ein rectang. EF von einem Binomio CE und reſiduo CF beſchloſſen, deren Nahmen DE, DC. ingleichen GF, GC commenſurabel, nemlich wie DE zu DC alſo GF zu GC. So wird die rechte Linie, welche das rectang. EF vermag, rational ſeyn.

Erklärung und Beweiß.

Dieſes iſt eine Repetition und fernere Approbirung vorherg. 113 und 114 Prop. nemlich:

Das binomium CE ſey √ 6 + 2 und das reſiduum

ſiduum CF √ 24 — 4. Deren Nahmen DE √ 6 gegen DC 2. als GF √ 24 gegen GC 4 ermeßlich, nemlich wie 2 zu 1. Es iſt auch die rechte Linie AB, welche das rectang. EF vermag 2. und alſo rational.

Die 116. Propoſition.

Von einer Mittel-Linie (media) entſtehen unendliche irrational Linien BC, CD, &c und iſt keine derſelben zu ihrer vorhergehenden einerley.

Erklärung und Beweiß.

1 Satz. Es ſey eine rational AE 2, woran eine Mittel-Linie AB √√ 3. gefüget, ſo giebt das rectang. AF an Inhalt √√ 48. Die rechte Linie BC ſo dis rectang. AF vermag, iſt irrational √√√ 48 und kommt mit vorhergehender AB √√ 3 nicht überein. Ferner thut BG an Inhalt √√√ 12288, dahero hält die Linie CD, ſo BG vermag √√√√ 12288 welche mit der vorhergehenden BC auch nicht überein kommet, und ſo fort unendlich weiter.

2 Satz. Noch deutlicher und behender, iſt ſolches zu berechnen, wenn die rational AE 1. gilt. AB ſoll bleiben √√ 3. So findet ſich, daß vor BC √√√ 3. vor CD √√√√ 3. vor DH √√√√√ 3 und alſo unendlich fort immer kleiner und kleiner werde, und dieſemnach keine der vorhergehenden gleich komme.

No.

Nota, Einige Auctores haben dieſe 116. Prop. zwar alſo abgehandelt, als weren hierunter die vorher angeführte 13 differirende irrational Linien zuverſtehen. Da hingegen wie zuſehen, der Beweiß in Zahlen einen gantz andern Verſtand hervor bringet.

Die 117. Propoſition.

In allen Quadraten ABCD iſt der Diameter oder Durchſchnit BD, zu einer Seite AB incommenſurabel.

Erklärung und Beweiß.

Weiln [47. 1.] das Quadrat BD zum Quadrat AB wie 2 zu 1. Und alſo nicht als eine Quadrat-Zahl zu einer Quadrat-Zahl. Dahero [9. 10.] ſeynd BD und AB gegen einander incommenſurabel oder unermeßlich.

Des Zehenden Buchs Ende.

Das Eilffte Buch EUCLIDIS.

Definitiones.

1. Solidum, oder ein Cörper iſt/ ſo eine Länge/ Breite und Dicke hat.

2. Das äuſſerſte eines Cörpers, iſt die Fläche.

3. Eine gerade Linie ſtehet auf einer Fläche perpendicular, wenn ſie mit denen geraden Linien, ſo auf ſolcher Fläche liegen, und ſelbige berühren, rechte Winckel formiret.

Alſo ſtehet AB auf der Fläche AC perpendicular, wenn die Winckel EAB, CAB, DAB, und FAB einander gleich, und alles rechte Winckel ſeynd.

Nota, alles was hier und folgend von Flächen genennet oder geſaget wird, iſt von geradliniſchen horizontal gleichen Flächen, und die an keinen Ort gebogen oder einige Krümme haben, zu verſtehen.

4. Eine Fläche HG, iſt perpendicular zu einer andern Fläche KL, wenn die rechte Linie KL, und perpendicular Linie KI, einem rechten Winckel machen.

5. Inclinatio, die Neigung einer rechten Linie MN, zu einer Fläche MO iſt, wenn von obern Punct

Punct N, eine perpendicular NO, auf die Fläche herunter fället, und die Linie OM gezogen, ſo dann NMO einen ſcharffen Winckel machet.

6. Die Neigung oder inclination einer Fläche PQ zu einer andern Fläche ST iſt, wenn aus S die ST perpendicular zu PU, item, SR auch perpendicular zu PU gezogen worden, ſo dann RST, einen ſcharffen Winckel machet.

7. Flächen incliniren oder neigen ſich gleichförmig zu andern Flächen, wenn deren Neigungs-Winckel (anguli inclinationum) einander gleich seynd.

8. Parallel-Flächen ſeynd, welche in gleicher Weite von einander abſtehen, und erlängert, niemaln zuſammen kommen.

9. Gleichförmige Cörper (Corpora) oder Cörperliche Figuren ſeynd, welche mit gleichförmigen, und an der Zahl gleichen Flächen beſchloſſen.

10. Gleich groß und gleichförmige Cörper aber ſeynd, welche mit gleich groſſen, und an der Zahl gleich vielen Flächen beſchloſſen.

11. Ein Cörperlicher Winckel iſt BADC, welcher zum wenigſten aus dreyen geraden Flächen ABD, ABC und DBC, ſo in Punct B zuſammen ſtoßen/ beſtehet.

Nota, Wenn künfftig hin ein Cörperlicher Winckel benennet wird, ſo geſchiehet ſolches gemeiniglich durch 4 Buchſtaben, davon der

Er-

Erſte Buchſtabe, die Spitze des Winckels bedeutet.

12. Pyramis, oder eine Spitz-Säule iſt, ſo auf einer Fläche ABCD ſtehet, und deren darauf ſich befindende äuſern Fläche, oben in einem Punct E zuſammen lauffen.

13. Prisma, oder eine Eck-Säule iſt, ſo auf einer Fläche FGHIK ſtehet, und auch oben mit einer dergleichen Fläche LMNOP beſchloſſen, da allezeit der Seiten Endungen oder Linien mit einander parallel lauffen.

14. Sphæra, oder eine Kugel iſt, wenn man dem halben Circul ABC umb dem Diametro ADC gantz herum drehet.

15. Axis Sphæræ, iſt der Kugel Diameter ADC.

16. Centrum Sphæræ, der Kugel Mittel-Punct iſt D.

17. Der Kugel Diameter iſt ADC, nemlich die längſte gerade Linie, ſo in einer Kugel durchs Centrum D kan gezogen werden (alſo iſt Axis Sphæræ oder der Kugel Diameter einerley.

18. Conus, ein Kegel oder runde Spitz-Säule iſt, ſo auf einer Circul-Fläche EF ſtehet, und deſſen äuſere Superficies oben in einem Punct G ſich endiget.

19. Axis Coni, oder des Kegels Mittel-Linie iſt GH, ſo oben aus der Spitze G, mitten auf die Circul-Fläche EF herunter fället.

20. Baſis Coni, oder des Kegels Grund-Fläche, iſt ein runder Circul, deſſen Diameter EF.

21. Cylindrus, eine runde Säule oder Walze iſt, welche auf einer Circul-Fläche IKL ſtehet und auch oben mit dergleichen Fläche NMO beſchloſſen, oder aber, da die parallel Seite oder Linie NI mit MK rings herum gedrehet/ und davon beſchloſſen wird.

22. Axis Cylindri, iſt die Linie KM, ſo mitten in Cylinder ſtehet.

23. Baſes Cylindri, ſeynd die untere- und obere runde Flächen IL und NO.

24. Gleichförmige Coni und Cylindri ſeynd, deren Axes und Diametri ihrer Grund-Flächen proportionirt.

25. Cubus, oder ein Würffel, iſt ein Corpus regulare, von 6 gleich groſſen quadratis beſchloſſen/ deſſen eine Seite iſt AB.

26. Tetraedrum, iſt ein Corpus regulare, von 4 gleichſeitigen und gleich groſſen Triangeln beſchloſſen, deſſen eine Seite iſt CD.

27. Octaedrum, oder ein Corpus regulare, von 8 gleichſeitigen und gleich groſſen Triangeln beſchloſſen, deſſen eine Seite iſt EF.

28. Dodecaedrum, ein Corpus regulare, welches von 12 regularen oder gleichſeitigen und gleich winckelichten auch gleich groſſen 5 Ecken beſchloſſen. Und iſt eine Seite des Dodecaedri GH.

29. Icoſaedrum, ein Corpus regulare, welches von 20 regularen oder gleichſeitigen und gleich

groſſen

groſſen Triangeln beſchloſſen, deſſen eine Seite iſt IK.

30. Parallelepipedum, iſt ein Corpus gleich einen 4eckichten recht winckelichten Kaſten, von 6 vierſeitigen Flächen beſchloſſen, davon ie 2 und 2 (als ABCD und EFGH, item, ABFE und DCGH &c.) einander über, parallel ſtehen.

31. Cörperliche Figuren seynd in Cörperliche Figuren recht eingeſchrieben, wenn alle Winckel oder Ecken der einſchreibenden Figur, der andern Figur ihre Winckel, Seiten, oder Flächen berühren.

32. Cörperliche Figuren, seynd umb Cörperliche Figuren recht umbſchrieben, wenn die innere Figur mit allen ihren Winckeln oder Ecken, der umbgeſchriebenen Figur Winckel, Seiten, oder Flächen berühret.

Die 1. Propoſition.

Ein Theil AB von einer geraden Linie ABC, kan nicht auf einer Fläche WX, und der übrige Theil BC, auf einer andern Fläche liegen.

Erklärung und Beweiß.

Erlängere AB bis E, und ſtelle in B die perpendicular DB. Der Winckel DBE und DBC, müſte [3 def. 11.] ieder ein rechter Winckel ſeyn, ſo aber [9 ax. 1.] impoſſible.

Nota, Man könte zwar ſagen, daß eine Linie, auf 2 Flächen zugleich alſo zu liegen käme, nemlich: Wenn zwey horizontale Flächen neben einander lägen, und die gerade Linie auf beyde Flächen zugleich auf eins geleget oder gezogen würde. Da denn nothwendig der eine Theil der Linie auf einer Fläche, ingleichen der andere Theil der Linie auf der andern Fläche liegen ſolte. Welches aber hier nicht gilt, denn weder die Linie noch die Fläche wird zertheilt/ ſondern beydes untheilbar oder gantz verſtanden.

Die 2. Propoſition.

Wenn 2 rechte Linien FG und HI einander in K durchſchneiden, ſo werden ſie auf einer Fläche allein (das iſt auf keiner andern Fläche zugleich) liegen. Es lie-

get auch ieder rechtliniſcher Triangel KIG, auf einer Fläche allein.

Beweiß.

1 Satz. Solte der eine Theil des Triangels KLM, auf einer Fläche, und der andere Theil ſolches Triangels auf einer andern Fläche liegen, ſo könten die Linien KI und KG [1. 11.] keine geraden Linien ſeyn. Weiln ſie aber [Prop.] gerade Linien, ſo muß auch der Triangel KIG nur auf einer Fläche allein liegen.

2 Satz. Gleiche Bewandnüs hat es auch mit denen geraden Linien FG und HI, Denn gerade Linien können anders nicht, alß durch gerade Flächen hingehen oder anliegen, es mag in übrigen dergleichen Fläche horizontal oder vertical, auch gar ſchreg fallen, und gerechnet werden.

Die 3. Propoſition.

Wenn 2. gerade Flächen einander durchſchneiden. So wird deren Durchſchnit MN, eine gerade Linie ſeyn.

Beweiß.

Were der Durchſchnit keine gerade Linie, ſondern eine andere krumme Linie MON, ſo würde dieſem nach [1. 11.] die Fläche auch nicht gerade ſeyn. Dahero eine iede gerade Fläche, durch eine andere gerade Fläche, einem geraden Durchſchnit MN, hervor bringet.

Die 4. Propoſition.

Wenn eine gerade Linie RU, perpendicular auf 2 geraden einander durchſchneidenden Linien PS und QT ſtehet. So wird ſelbige auch auf der Fläche (worauf die beyden geraden Linien PS und QT liegen) perpendicular ſtehen.

Beweiß.

Dis iſt [3. def. 11.] eine klare und dadurch deutlich erwieſene Sache.

Die 5. Propoſition.

Wenn eine gerade Linie BC auf 3 geraden Linien AC, DC und EC (die einander in Punct C berühren) perpendicular ſtehet. So werden ſolche 3 Linien, auf einer Fläche allein liegen.

Beweiß.

Dis iſt vorhergehender Propoſition in allen conform. Denn ACB, DCB, und ECD iſt ieder ein rechter Winckel, dahero werden auch [4. 11.] alle 3 gerade Linien AC, DC und EC auf einer geraden Fläche allein liegen.

Die 6. Propoſition.

Wenn zwey gerade Linien FG und HI auf einerley oder einer Fläche allein, perpen-

pendicular ſtehen. So werden ſelbige einander parallel ſeyn.

Beweiß.

Man mache die perpendicular-Linien FG, und HI einerley Höhe, ſo werden [3 def. 11] FHI und HFG, und alſo ebenermaſſen GIH und IGF rechte Winckel ſeyn. Dahero dann [28. 1.] FH mit GI, und FG mit HI parallel.

Die 7. Propoſition.

Wenn zwey Linien AB und CD parallel, und darauf 2 Puncta E und F genommen, und mit einer geraden Linie EF zuſammen gezogen werden. So wird dieſe Linie EF, auf eben derjenigen Fläche, worauf die parallel-Linien ſeynd, liegen.

Beweiß.

Auf welcher Fläche die Parallel-Linien AB und CD liegen, müſſen nothwendig auch deren Puncta E und F, folglich [1. 11.] ebener maſſen die Linie EF liegen.

Die 8. Propoſition.

Wenn zwey Parallel-Linien AB und CD ſeynd, deren eine AB, auf einer Fläche perpendicular ſtehet. So wird auch die andere CD, auf ſolcher Fläche perpendicular ſtehen.

Beweiß.

Dis iſt vice verſa vorhergehende 6 Prop. und alſo daſelbſt albereit gnüglich erwieſen.

Die 9. Propoſition.

Die geraden Linien G H und I K, ſo nicht auf einer Fläche liegen, iedoch beyde mit einer andern Linie B E parallel; Die ſeynd auch unter ſich einander parallel.

Beweiß.

Man ſtelle LM perpendicular auf GH, und MN perpendicular auf IK. und laſſe dem Durchſchnitt LMN eine Fläche gelten. So werden [6 und 8. 11.] GH und I K einander parallel ſeyn. (Es iſt auch durch die 30 Prop. des 1 Buchs, eine albereit erwieſene Sache.)

Die 10. Propoſition.

Wenn 2 gerade Linien A B und B C, ſo ſich einander in B berühren, parallel ſeynd, zweyen andern Linien DE und EF, welche ebenermaſſen einander in E berühren, ob ſolche ſchon nicht auf einer Fläche liegen. So werden dennoch die Winckel ABC und DEF gleich ſeyn.

Beweis.

Man mache AB = DE, und BC = EF. So wird auch AC = DF und [8. 1.] der Winckel

ABC

ABC = dem Winckel DEF, ſeyn. So zubeweiſen war.

Die 11. Propoſition.

Aus einem über einer Fläche in der Höhe gegebenen Punct A eine perpendicular-Linie, auf die Fläche herunter zu fällen.

Operatio.

Ziehe auf der Fläche nach gefallen, die gerade Linie BC, dann [12. 1.] AD perpendicular auf BC, ferner DE perpendicular auf BC. Endlich auch gezogen von A auf DE [12. 1] die perpendicular AF, ſo iſt ſolches geſchehen.

Beweiß.

Ziehe durch F die GH, parallel mit BC, ſo werden DE und GH zwey auf einer Fläche einander durchſchneidende Linien ſeyn, und dahero [4. 11.] AF auf ſolcher Fläche perpendicular ſtehen.

Die 12. Propoſition.

Aus einem auf einer Fläche gegebenen Punct K, eine perpendicular Linie KN aufzuſtellen.

Operatio.

Man fälle nach Gefallen [11. 11.] aus einem Punct L oberhalb der Fläche, die perpendicular LM herunter. Dann ziehe [31. 1.] KN mit LM parallel, ſo iſt es verrichtet.

Beweiß.

Diß iſt vermöge vorhergehender 8. Propoſit. eine klare Sache.

Die 13. Propoſition.

Auf einer ieglichen geraden Fläche, kan von Punct K nur eine perpendicular-Linie KN, aufgeſtellet werden.

Beweiß.

Wäre aus K noch eine andere perpendicular-Linie zu ſtellen, ſo würde ſelbige mit LM nicht parallel ſeyn, ſondern [5 def. 11] zur Fläche ſich neigen. Dahero kan keine andere perpendicular als KN ſeyn, oder geſtellet werden.

Nota, wenn man aber NK durch die Fläche unter ſich durch erlängert, ſo wird zwar ſelbige auch auf der andern Seite oder Fläche perpendicular (iedoch unter- und alſo nicht auf der Fläche) geſtellet ſeyn.

Die 14. Propoſition.

Die Flächen CD und EF, auf welchen zugleich AB perpendicular ſtehet, ſeynd einander parallel.

Beweiß.

Man ziehe durch A die GH, ingleichen durch B die IK, ſo werden [3 def. 11] die Winckel HAB und GAB, item IBA und KBA rechte Winckel ſeyn. Und dieſemnach [27. 1.] ſowohl beyde Li-

Linien GH und IK, als auch deren Flächen [8. 11] CD und EF einander parallel ſeyn.

Die 15. Propoſition.

Wenn 2 gerade Linien AB und BC, ſo ſich in B berühren parallel ſeynd, zweyen andern Linien DE und EF (auf einer andern Fläche) die ſich in E berühren. So werden die Flächen durch ſolche Linien gezogen, einander parallel ſeyn.

Beweiß.

Man ziehe aus B [11. 11] auf die Fläche DF die perpendicular Linie BH, ferner HI parallel mit BC, und ebenermaßen GH parallel mit AB. So werden [3 def. 11] GHB und ABH rechte Winckel, folglich [14. 11] die Flächen DF und AC einander parallel ſeyn.

Die 16. Propoſition.

Wenn man zwey Flächen AB und CD, die einander parallel, mit einer andern Fläche EG durchſchneidet. So werden alsdenn auch die Durchſchnitte EF und HG einander parallel ſeyn.

Beweiß.

Es ſey bey denen parallel Flächen, die IB parallel der KD. Dieſemnach werden [27. 1] die Winckel BFG und KGF, item, IFG und DGF einander gleich, und alſo, wie IB zu KD, ebener-

maßen auch [15. 11] deren Flächen AB und CD einander parallel ſeyn.

Die 17. Propoſition.

Zwey gerade Linien AD und AE, werden mit parallel-Flächen proportionirt durchſchnitten.

Beweiß.

Man ziehe BC und DE zuſammen, dieſe werden dann [16. 11.] einander parallel ſeyn, und [2. 6.] AB gegen BD, wie AC gegen CE ſich verhalten.

Die 18. Propoſition.

Wenn eine gerade Linie FG, auf einer Fläche perpendicular ſtehet. So werden alle Flächen HI, oder KL, die man durch ſolche Linie FG ziehet, auch auf derſelben Fläche perpendicular ſtehen.

Beweiß.

Man laſſe LM mit FG parallel ſeyn, dieſe Linie wird dann [8. 11] ebenfalls gleich der Linie FG auf der Fläche perpendicular ſtehen, folglich auch alle unendliche perpendicular Linien, ſo in dieſen durchzogenen Flächen können genommen werden, nichtweniger [15. 11] deren Flächen ſelbſt. So zu beweiſen war.

Die

Die 19. Propoſition.

Wenn zwey Flächen HI und KL ſich einander durchſchneiden, und auf einer Fläche perpendicular ſtehen. So wird auch deren Durchſchnitt FG auff ſolcher Fläche perpendicular ſtehen.

Beweiß.

Dis iſt vice verſa vorhergehende 18. Propoſition, da alſo, wenn jenes nicht wahr, dieſes hier auch nicht ſeyn könte, und demnach gnüglich erwieſen.

Die 20. Propoſition.

Jn einem ieden Cörperlichen Winckel ABCD (nemlich den Winckel A) aus drey flachen Winckeln BAC, CAD und BAD, beſtehende. Seynd allzeit zwey Winckel zuſammen (wie man ſie auch nehme) gröſſer als der dritte.

Beweiß.

1 Satz. Wenn alle 3 Winckel einander gleich, ſo iſt es eine an ſich ſelbſt richtige Sache.

2 Satz. Da aber ein Winckel davon, gleich wie hier BAD der Gröſte, ſo mache man dem Winckel BAE = BAC. Da nun BE = BC, als folget [20. 1.] daß ED allezeit kleiner als CD übrig bleibe. Und da AD commun, ſo wird der Winckel EAD auch allezeit kleiner als CAD übrig bleiben. So zu beweiſen war.

No-

Nota, Man nimt hier vor bekand, daß BCD die Grund-Fläche, A aber die Spitze des Cörperlichen Winckels ſey. Wenn nun A mitten auf die Grund-Fläche fället, ſo hat obige Demonſtration ihre Richtigkeit, wo nicht! ſo kan doch die Grund-Fläche allezeit alſo formirt, oder formirt zu ſeyn, darunter verſtanden werden.

Die 21. Propoſition.

Ein ieder recht liniſcher cörperlicher Winckel ABCDE iſt kleiner, als vier geradliniſche rechte Winckel.

Beweiß.

Es ſey BCDE die Grund-Fläche, A aber die Spitze des cörperlichen Winckels. Were dieſe Figur eine Fläche, ſo würden die vier Winckel umb A herum [10 ax. 1.] gleich ſeyn 4 rechten Winckeln, und demnach alle 4 Triangel zuſammen [32. 1.] 8 rechte Winckel halten.

Betrachtet man nun, an denen 4 Ecken B, C, D und E, die cörperlichen Winckel, (welche iederzeit, von 3 rechtliniſchen Flächen oder Winckeln beſchloſſen) dieſemnach werden bey B, die Winckel EAB + ABC [20. 11.] gröſſer als der Winckel EBC ſeyn. Dis geſchiehet auch bey denen übrigen 3 Ecken C, D und E, woraus folget! daß alle erhobene Winckel, derer 4 Ecken auch gröſſer, als vier rechte Winckel ſeyn müßen. Dieſe dann von vorher gemeldten 8 rechten Winckeln abgezogen, werden die übrigen 4 Winckel umb A herum

um kleiner als 4 rechte Winckel in Reſt verbleiben. So zu beweiſen war.

Die 22. Propoſition.

Wenn bey drey flachen Winckeln X, Y, Z, (da allezeit zwey zuſammen genommen gröſſer, als der Dritte) die Seiten, welche dieſe Winckel faßen, BA und BC, BC und BD, BD und BE und demnach alle 6 Seiten einander gleich seynd. So iſt möglich! daß man von denen (dreyen Winckeln X, Y, Z,) dreyen unterzogenen Seiten AC, CD und DE einen Triangel machen könne.

Beweiß.

Wegen der gleichen Seiten bringe man dieſe drey Triangel in einen Circul. Iſt nun der Winckel Y+Z gröſſer als der Winckel X, ſo wird [33. 6] auch CE, noch viel mehr aber CD+DE gröſſer als AC ſeyn. Ebenfalls, da der Winckel X+Y gröſſer, als der Winckel Z, ſo wird wiederum [33. 6] AD, noch vielmehr aber AC+CD gröſſer, als DE ſeyn. Dahero iſt [22. 1] möglich, aus denen dreyen Seiten AC, CD und DE einen Triangel zu machen. So zu beweiſen war.

Die 23. Propoſition.

Aus dreyen gegebenen flachen Winckeln

ckeln R, S und T (da allezeit 2 zuſammen genommen gröſſer als der Dritte) einen cörperlichen Winckel zu machen. Jedoch müßen die 3 gegebene flache Winckel zuſammen kleiner, als 4 rechte Winckel ſeyn.

Operatio.

Mache bey dieſen flachen Winckeln R, S und T, die Linien DA, DB und DC einander gleich, und ziehe AB, AC und CB zuſammen. Aus ſolchen 3 Linien formire dem Triangel ABC, in deſſen Centro E, richte in die Höhe [12. 11.] die perpendicular Linie EF, und mache [47. 1.] das quadrat AE + quadrat EF = dem quadrat AF (ſo = AD, CD oder BD) dieſemnach wird F das Punctum oder die Spitze des begehrten cörperlichen Winckels (FACB) ſeyn. Von welchen F, die FB und FC vollends herunter kan gezogen werden.

Beweiß.

Weiln FE von F in des Circuls Centrum E herunter fället, und FA = AD. So wird auch [18 def. 11.] FB und FC = AD (denn in Anſehung des Circuls formirt dieſe Figur einen Kegel) item, der Triangel AFB = ADB, und der Triangel AFC = ADC, alſo auch der Triangel CFB = CDB, und folglich F der begehrte cörperliche Winckel ſeyn.

Die

Die 24. Propoſition.

In denen cörperlichen Figuren ABC DEFGH, ſo unter parallel Flächen beſchloſſen, ſeynd ie zwey gegeneinander über ſtehende Parallelogramma, gleichförmig und gleich groß.

Erklärung.

Die Fläche AC iſt parallel der Fläche EG, item, AH parallel der BG, und AF parallel mit DG. Man ſagt dahero, daß dieſe Flächen auch einander gleichförmig und gleich groß seyn ſollen.

Beweiß.

Man laſſe [16. 11.] bey denen Flächen AC und EG, die Linien AB und EF durchſchnitte ſeyn. So werden auch DC und HG parallel mit AB und EF, ferner ebenfals wegen der übrigen gleichen Linien die Flächen AC und EG einander gleich groß und gleichförmig ſich befinden. Eine ebenmäßige Bewandnüs, hat es dann auch mit die übrigen Flächen.

Die 25. Propoſition.

So man ein Parallelepipedum AB, mit einigen Flächen (denen gegenſtehenden Flächen parallel) durchſchneidet. So werden die abgeſchnittene Stücke in ihrer Solität, ſich gleich denen Theilen der baſis verhalten.

Er-

Erklärung.

Die Fläche IK ſey parallel der Fläche AD und GB, alſo auch die Fläche LM. Dahero das Stück AK gegen AB, wie AI gegen AG, item, das Stück IM gegen AB, wie IL gegen AG &c. ſich verhält.

Beweiß.

Man laſſe AI $\frac{1}{3}$ von AG ſeyn, ſo iſt klar, daß auch AK $\frac{1}{3}$ von AB ſeyn müſſe, item, IL ſey halb AG. Dahero auch IM halb AB, Ferner ſey der Reſt LG $\frac{1}{6}$ von AG, alſo wird auch ſeyn LB $\frac{1}{6}$ von AB &c.

Die 26. Propoſition.

Aus einem Punct A, der gegebenen geraden Linie AB, einen Cörperlichen Winckel gleich dem fürgegebenen CDEF, an die Linie AB zu machen.

Erklärung.

Erſtlich iſt zu wiſſen, daß man dieſe Figur alſo verſtehen muß, wie die Linie AB auf einer Fläche, alſo auch der flache Winckel DCF auf einer Fläche liege, und CE die erhabene Linie des cörperlichen Winckels ſey.

Operatio.

Aus E fälle [11. 11.] die perpendicular-Linie EG, und ziehe DG, CG und FG zuſammen. Nun mache [23. 1.] dem Triangel AIH = CGD und AIL = CGF, richte ferner in I [12.

[12. 11.] eine perpendicular IK auf = GE So wird ABKL der begehrte cörperliche Winckel ſeyn.

Beweiß.

Wegen der gleich-durchgehend gemachten Winckel und correſpondirenden Linien, iſt es eine an ſich ſelbſt deutliche und warhaffte Sache.

Die 27. Propoſition.

An eine gegebene gerade Linie AB, ein Parallelepipedum AK, einem andern fürgegebenen Parallelep. CG gleichförmig, zu ſtellen.

Operatio.

Man mache dem cörperlichen Winckel BAIH [26. 11.] = dem cörperlichen Winckel DCFE, und [12. 6.] wie DF gegen CD, alſo BI gegen AB, item, wie DE zu CD, alſo BH zu AB. Das übrige geſchiehet durch Ziehung derer Parallel-Linien, womit ſo dann das Parallelepipedum AK, dem Parallelep. CG gleichförmig ſeyn wird.

Beweiß.

Gleich wie bey der Operation, derer Flächen, Seiten proportionirt genommen worden, alſo ſeynd auch [24. 11.] durch die Parallel Linien, die Flächen proportionirt, und dieſemnach iſt [9. def 11.] ein Parallelepipedum dem andern gleichförmig. So zubeweiſen war.

Die 28. Propoſition.

Ein iedes Parallelepipedum, wird durch die übereckgezogene Fläche AD, von beyden diagonal-Linien BD und AG, juſt in zwey Theil zerſchnitten.

Beweiß.

Dis iſt wegen bey beſchehener zerſchneidung, und derer darauf erfolgenden beyden Theilen gleich langen Linien oder Seiten, auch gleichen Winckeln, eine an ſich ſelbſt klare, deutlich erweiſende Sache.

Die 29. Propoſition.

Alle Parallelepipeda, die auf einerley baſis AO und AF, anbey auch BO mit EF in gleicher Linie, und unter gleicher Höhe DM ſtehen. Die ſeynd einander gleich groß.

Beweiß.

Wegen derer gleichen Linien und Winckel, iſt das Prisma oder die Eck-Säule EAC [28.11.] = FDH, ſubtrahire dann [3 ax. 1] das commune HINEQC beyderſeits. So dann addire zu beyden Reſten wieder das gleichfals commune LMNQDA, ſo wird [2 ax. 1.] das Parallelepiped. AH dem AK gleich groß ſeyn. So zubeweiſen war.

Die

Die 30. Propoſition.

Die Parallelepida, die auf einerley baſi ABCD, und unter einer Höhe, ob ſchon nicht in gleich aufſtehenden Seiten (ſondern vielmehr gantz verſchoben) liegen, die ſeynd gleicher Gröſſe.

Erklärung.

Das Parallelepipedum ABCDEFGH iſt = dem Parallelep. ABCDIKLM, alß welche beyde auf einer baſi ABCD, und gleicher Höhe, (ob ſchon nicht in gleich aufſtehenden Seiten, AE und AI) liegen.

Beweiß.

Erlängere EF und LK in N, ingleichen HG in O, ebenfalls MI biß P. Dann formire das Parallelepipedum AO. Dis wird den [29.11] mit AL, conſequenter auch mit dem Parallelepip. AG gleicher größe ſeyn. So zu beweiſen war.

Die 31. Propoſition.

Alle Parallelepipeda, die auf gleichen baſibus ſtehen, und einerley Höhe haben, die ſind einander gleich groß.

Beweiß.

Dis iſt durch vorhergehende 29. und 30. Propoſit. eine allbereit gnüglich bekande und erwieſene Sache.

Die 32. Propoſition.

Alle Parallelepipeda, ſo einerley Höhe, verhalten ſich gegen einander, gleich wie ihre baſes, oder Grund-Flächen.

Erklärung.

Das Parallelepipedum AE, und das Parallelepip. FK ſtehen unter gleicher Höhe EC und KH. Dahero verhält ſich das erſte zu dem andern gleich wie baſis oder die Grund-Fläche AC zu der Grund-Fläche FH.

Beweiß.

Bringe an IK [45. 1.] das rectangulum IM = AC, und formire das Parallelepipedum IL. Dieſemnach wird [31. 11] das Parallelepipedum IL = ſeyn AE. Und AE, das iſt IL ſich gegen FK verhalten [25. 11.] gleich wie die Grundfläche IM (das iſt AC) zu FH. So zu beweiſen war.

In Zahlen.

Beyde Parallelepipeda ſeynd rechtwincklich zu verſtehen, und halte AD 12. DC 8 und die Höhe EC 10. Ferner FI 16. IH 12 die Höhe HK gleich vorigen 10. Dieſemnach wird ſeyn des Parallelepip. AE Grundfläche AC 96. und der Cubiſche Inhalt 960. Des Parallelepip. FK Grundfläche FH 192. und der Cubiſche Inhalt 1920. Wie nun 96 zu 960. alſo iſt 192. zu 1920. So zu beweiſen war.

Die

Die 33. Propoſition.

Gleichförmige Parallelepipeda ſtehen gegen einander in 3facher Verhältnis (das iſt cubiſcher Verhältnis) ihrer proportionirten Seiten.

Erklärung.

Es ſollen ſeyn, des einen Parallelepipedi Seiten 16. 12. 10. Und des andern Parallelepipedi proportionirte Seiten 24. 18. und 15. Welche alſo in gleicher Verhältnis oder gleichförmig.

Beweiß.

Rechne beyder cubiſchen Inhalt. Kömmt des einen 1920. und des andern 6480. Wie nun 16 gegen 24. in 3facher Verhältnis, nemlich 16. 24. 36. 54. Das iſt 16. gegen 54. oder 1 gegen $3\frac{3}{8}$. alſo iſt auch 1920. gegen 6480. So zu beweiſen war.

Die 34. Propoſition.

Gleiche Parallelepipeda haben ihre baſes und Höhe reciproce oder wiederſins proportionirt. Und welche Parallelepipeda ihre baſes und Höhe wiederſins proportionirt haben, die ſeynd auch mit einander gleich groß.

Erklärung.

Das eine Parallelepipedum ſey A B C D I K L, das andere gleich große aber E O. Wie ſich nun baſis

baſis AC zu der Höhe FH verhält, alſo wird ſich auch baſis EG zu der Höhe BD verhalten.

Beweiß.

Trage die Höhe BD von F bis D, und formire das Parallelepipedum EL.

1 Satz. Das Parallelepipedum AL wird ſeyn [32. 11.] gegen der Fläche AC, als das Parallelepipedum EL gegen der Fläche EG.

Weiln nun das Parallelep. AL = dem EO ſo iſt [7. 5.] AL gegen EL, wie EO gegen EL. Item, MO gegen EL, [25. 11.] wie die Fläche MH gegen der Fläche ED, oder [1. 6.] wie die Höhe DH gegen der Höhe FD, und durch addirung [18. 5.] das Parallelepip. EO (das iſt AL) gegen EL. Wie FH gegen FD (oder BD.)

Das iſt, wie des Parallelep. AL Fläche AC, zu der Höhe FH, alſo des Parallelep. EL Fläche EG, zu der Höhe FD (gleich DB) So zubeweiſen war.

2 Satz. iſt vice verſa vorhergehendes, denn wenn jenes nicht warhafft, könte auch dieſes nicht wahr ſeyn, daß Parallelepipeda, ſo ihre baſes und Höhe wiederſins proportionirt, einander gleich groß ſeyn ſolten. Dis alles wird näher erhellen.

Durch die Erklärung und Beweiß in Zahlen

Es ſey des einen Parallelepipedi Länge AB 16. die Breite BC 10 und Höhe BD 12. Ferner ſey des andern gleich groſſen Parallelep. Länge EF 15. die Breite FG 8 und die Höhe FH 16.

Be-

Beweiß

1 Satz. Ein iedes Parallelepipedum hält an cubiſchen Inhalt 1920 (werden beyde rechtwincklicht verſtanden) ſeynd alſo gleich groß.

Und baſis AC 160 iſt zu der Höhe FH 16.

Wie baſis EG 120 zu der Höhe BD 12.

2 Satz. Weil des einen Parallelep. (A L) baſis AC 160. gegen des andern Parallelep. (EO) Höhe FH 16. Gleichwie dieſes Parallelep (E O) baſis EG 120. gegen des erſtern Parallelep. (AL) Höhe B 12. So ſeynd auch beyde gleicher Gröſſe id eſt Inhalts, nemlich iedes 1920.

Die 35. Propoſition.

Wenn 2 flache Winckel (A B C und D E F) einander gleich, und von ihren Spitzen (B und E) gerade Linien (B G und E H) in die Höhe gehen, welche wiederum gleiche Winckel (A B G = D E H. und G B C = H E F,) formiren, und man auf denen in die Höhe gezogenen Linien zwey Puncta G und H nimmet, und von ſelbigen auf die Fläche herunter, die perpendicular Linien G K und H I, ſo dann K B und I E ziehet. So werden G B K und H E I auch gleiche Winckel ſeyn.

Beweiß.

Dis iſt eben vorhergehende 26 Propoſition,

 hier

hier nur in veränderten Vortrag. Denn weil BAGC und EDHF beyde Cörperliche Winckel, und die dreyflachen Winckel, gleich denen drey flachen Winckeln des andern. Wenn dahero BG = EH, ſo wird auch GK = HI, folglich der Winckel GBK dem Winckel HEI gleich ſeyn. So zu beweiſen war.

Die 36. Propoſition.

Ein aus dreyen proportionirt geraden Linien A, B und C zuſammen geſetztes Parallelepipedum DH. Iſt gleich einem andern Parallelepip. IM, welches aus der Mitlern Linie gleichſeitig, und mit erſtern gleichwincklich gemachet wird.

Beweiß.

DE ſey = A, EG = B, und EF = C, item, IK und KL auch KN = B. Weiln nun DE, und IK, dann EF, vermöge der Propoſ. in continuirlicher Verhältnüs. So wird [20.7.] IL ein Quadrat, und mit der Fläche DF [14.2.] gleich groß ſeyn. Und da EG und KN auch einander, B gleich groß, genommen worden So werden beyde Parallelepipeda, ſie ſeynd nun beyde rechtwincklicht, oder auch von gleich verſchobenen Winckeln [30.11.] einander gleich groß ſeyn. So zu beweiſen war

In Zahlen.

Sey A 16. B 12. und C 9. Dieſem nach wenn

bey-

beyde Parallelepipeda rechtwincklicht genommen werden, iſt eines jeden cubiſcher Inhalt 1728: und ſeynd alſo gleich groß.

Nota, Wenn beyde Parallelepipeda rechtwincklicht, ſo wird [20. 7.] das andere allezeit ein Cubus ſeyn, wo nicht! ſo iſt es doch wenigſt ein verſchobener Cubus.

Die 37. Propoſition.

Wenn vier gerade Linien A, B, C und D proportionirt ſeyn. So werden die darauff gleichförmig gemachte Parallelepipeda auch proportionirt ſeyn. Und ebenermaßen in Gegentheil, wenn vier gleichförmige Parallelepipeda proportionirt. So werden auch ihre gleichförmige Seiten proportionirt ſeyn.

Beweiß.

1 Satz. Weiln alle gleichförmige Parallelepipeda mit ihren proportionirten Seiten [33. 11] in 3facher (id eſt cubiſcher) Verhältnüs ſtehen. So wird A gegen B, wie C gegen D, ſich verhalten.

2. Satz. Nachdem es vice verſa vorhergehendes, als folget, daß wie bey gleichförmigen Parallelepipeden deren cubiſcher Inhalt proportionirt, auch ſo dann ihre gleich correſpondirende Seiten proportionirt ſeyn werden.

Dis wird deutlicher zu erkennen ſeyn in Zahlen.

1. Satz. Die Parallelepid. ſollen ſämtlich recht

 winck-

winckliche gelten, und A 10 lang, 6 breit und 8 hoch. B 5 lang, 3 breit, und 4 hoch. Dann C 8 lang, 4 breit, 6 hoch. D 4 lang, 2 breit, und 3 hoch ſeyn.

Die Proportion ſtehet denn alſo

wie 10. 6. 8. zu 5. 3. 4. alſo 8. 4. 6. zu 4. 2. 3.
wie 2 gegen 1. wie 2 gegen 1.

Die dreyfache Verhältnüs iſt dann 8. 4. 2. 1. nemlich wie 8 gegen 1. Dahero der Inhalt A 480 zum Inhalt B 60. wie der Inhalt C 192 zum Inhalt D 24. allezeit wie 8 zu 1.

1. Satz. Alſo auch in Gegentheil, wie derer Parallelep. Inhalt A 480 zu B 60. und C 192 zu D 24. ie in 3 facher Verhältnüs, wie 2 gegen 1 proportionirt, alſo auch ſeynd die Seiten A 10. zu B 5. und C 8 zu D 4 nemlich wie 2 gegen 1 proportionirt. So zubeweiſen war.

Die 38. Propoſition.

Wenn eine Fläche A F, auf einer andern Fläche A C perpendicular ſtehet, und man in der Fläche A F nach Gefallen den Punct D nimmet, und von ſolchen Punct D eine perpendicular Linie D E, auf die andere Fläche A C herunter fället. So wird ſelbige in dem Durchſchnitt A B in E (und alſo nicht neben bey weg) fallen.

Beweiß.

Weiln die Fläche AF auf der Fläche AC perpendicular ſtehet, und alſo beyde Flächen in AB einander durchſchneiden, ſo wird auch [18. 11.] die perpendicular Linie DE in der Fläche AF enthalten ſeyn, und dem Durchſchnit AB berühren, alſo nicht beyſeit wegfallen. So zubeweiſen war.

Die 39. Propoſition.

Wenn eines Parallelepipedi Seiten, jede beſondern in zwey gleiche Theile zertheilet, und durch ſolche Zertheilungs-Puncta, die Flächen ACGE und BDHF gezogen werden. So wird mit dem allgemeinen Durchſchnit L M, des Parallelepip. Diameter I K bey N in zwey gleiche Theile zertheilet oder zerſchnitten (nemlich IN = NK, und LN = NM.)

Beweiß.

Man ziehe I O und P K, ſo wird durch die Fläche I O K P [28. 11] das Parallelepipedum juſt in 2 gleiche Theile zerſchnitten. Da nun I P und O K parallel, ſo iſt [29. 1] der Winckel N I L = N K M, auch [26. 1.] I L N = K M N, item, I L = K M. Folgt! daß [26. 1.] auch M N = L N, item, K N = I N, und alſo N das begehrte Centrum ſeyn wird.

Die

Die 40. Propoſition.

Zwey Prismata, welche gleicher Höhe AD und HI, da des einen Grundfläche ABC ein Triangel, des andern Grundfläche aber ein Parallelogram EFGH, und der Triangel ABC die Helffte des Parallelograms EFGH thut. So werden beyde Prismata einander gleich ſeyn.

Beweiß.

Man erfülle beyde, ſo werden hierdurch zwey Parallepipeda AK und EL formiret, welche auf gleichen baſibus [41.1.] ABEC = EFGH ſtehen, und unter AD und HI gleicher Höhe ſeynd. Auch wird iedes durch die Diagonal-Linien BC und EI [28.11.] juſt in 2 gleiche Theil getheilet. Dahero iſt dann das Prisma ABDC = EFLH, ſo zu beweiſen war.

Des Eilfften Buchs Ende.

Das Zwölffte Buch EUCLIDIS.

Die 1. Propoſition.

Die in Circul eingeſchriebene gleichförmige Eck-Figuren, verhalten ſich gegen einander, gleich wie deren Diametern ihre Quadrata.

Erklärung.

Gleich wie der Inhalt des regularen 6 Ecks AB zu dem Inhalt des reg. 6 Ecks DE ſich verhält Alſo wird ſich auch das Quadrat des Diametri B C zum Quadrat des Diametri E F, verhalten.

Beweiß.

Dis iſt durch die 20 und 21. Prop. des 6 Buchs eine klare und albereit gnüglich erwieſene Sache.

Die 2. Propoſition.

Derer Circul Inhalt, iſt proportionirt, gleich wie die Quadrata von ihren Diametern.

Beweiß.

Man formire auf ieden Diameter ein Quadrat, und ziehe BI und FK. Weil nun BIA und FKE iedes der Vierte Theil von Circul. Dahero wird

wird ſich [20 und 21. des 10.] der Circulſchnitt IBLA, gegen dem Circulſchnitt KFME, wie das Quadrat von AC, gegen dem Quadrat von EG, verhalten. Conſequenter auch der gantze Circul ADCBL, zu dem gantzen Circul EHGFM, alß das Quadrat AC, zum Quadrat EG ſich verhalten.

Nota, Dieſer Beweiß dürffte einigen, als alzu kurtz abgeſchnitten zu ſeyn, ſcheinen, verſichere aber, daß andere weitläufftigere angeführte Beweiſe, keinen nähern Zweck erreichen können, bis ſo lange quadratura circuli in gemeinen Zahlen, gefunden wird. Mit welcher Arbeit ſich zwar unterſchiedliche viel Kopff rechnens gemachet, aber bis dato vergeblich geſuchet, auch wohl bis in Ewigkeit vergeblich ſuchen werden. In denen Mathem. Demonſtrationibus, iſt allbereit folio 22. die Unmöglichkeit einiger maßen bekand gemachet worden.

Daß ein quadrat einen Circul gleich groß ſeyn könne, iſt wohl möglich, nur aber nicht möglich, dis in gemeinen Zahlen accurat anzugeben.

Denn ſo wenig man [117. 10.] aus der Quadrat-Zahl 2. die Quadrat-Wurtzel in gemeinen Zahlen accurat finden oder extrahiren kan. Noch viel weniger iſts möglich, eine richtige Vergleichung des Circuls, gegen ein Quadrat, geometricè anzugeben.

Die 3. Propoſition.

Eine iede Pyramis ABCD welche eine 3eckigte baſis ABC hat, wird in zwey Prismata, ingleichen zwey Pyramiden (durch die halb getheilten Seiten-Linien) alſo abgetheilet: Daß beyde Pyramiden mit der Gantzen gleichförmig, beyde Prismata aber, einander gleich groß, und allezeit zuſammen gröſſer, als die Helffte der gantzen Pyramis ABCD. ſeynd.

Erklärung und Beweiß.

1 Satz. Weiln die Seiten-Linien AB, BC, und AC, dann auch AD, BD und CD, iede in zwey gleiche Theile, zertheilt werden. So wird [15.5.] DF gegen DE, wie DB gegen DC ſich verhalten, und dahero [2.6.] FE mit KC parallel ſeyn. Auf ſolche Art iſt auch GE parallel mit IC, und GF parallel mit IK. Item GI mit FK, GH mit FB, und IH mit KB parallel.

Da nun das Parallelogram BHIK, mit dem Triangel KIC einerley baſin und gleicher Höhe. Dahero iſt das Parallelogram gegen dem Triangel doppelt, und beyde Priſmata BHIKFG und KICEFG gleicher Höhe, dieſem nach [40.11.] beyde Prismata auch gleich groß. So zu beweiſen war.

2 Satz. In dem E, F, G, H, I und K von denen Seiten die Mittel-Puncta ſeynd. So iſt [2.6.] die

die Pyramis DGFE, der Pyramis DABC, gleichförmig, und iede Seite der andern Helffte, alſo wie 1 gegen 2. und in 3 facher Verhältniß [33. 11.] wie 1.2.4. 8. oder 1 gegen 8. Dahero die Pyramis DGFE, $\frac{1}{8}$ von DABC. Alſo beyde zuſammen $\frac{1}{4}$. Folglich der Reſt beyder Prismata zuſammen $\frac{3}{4}$. und alſo gröſſer als die Helffte der gantzen Pyramis ABCD. So zu beweiſen war.

Die 4. Propoſition.

Zwey Pyramiden ABCD und EFGH, ſo einerley Höhe und 3 eckichte baſes haben, und man iede in 2 gleich groſſe Pyramiden und 2 Prismata (gleich wie bey vorhergehenden 3 Propos.) abtheilet. Auch die daraus entſtehende kleinere Pyramiden alſo wieder, und immer fort ferner gleich zertheilet. So wird ſeyn, daß wie ſich baſis BCD der einen Pyramis zu baſis FGH der andern Pyramis verhält: ſich alle hervorkommende Prismata der einen zu allen Prismatibus der andern, auch alſo verhalten werden.

Beweiß.

Nach Procedirung vorhergehender 3 Prop. iſt klar, daß alle, ie durch gleich getheilte Seiten ferner entſtehende Prismata und Pyramiden, unter gleicher Höhe und proportionirten Seiten continue hervor kommen müßen. Und dahero wie

gleich

gleich Anfangs [als in folgender 5 Prop. wird erwieſen werden] ſich beyde gleich hohe Pyramiden, in proportion ihrer baſes verhalten, alſo ebenfals alle ferner entſtehende gleiche Priſmata [40. 11.] ſich zu denen andern gleichförmigen, wie baſis BCD zu baſis FGH, verhalten werden. So zu beweiſen war.

Die 5. Propoſition.

Pyramiden ſo einerley Höhe, und dreyeckichte baſes haben, verhalten ſich gegen einander, gleich wie ihre baſes.

Beweiß.

Weil [wie nachfolg. 7. 12. beweiſet] eine jede Pyramis, von einen Priſma unter einerley Höhe, gleich der dritte Theil. Und alle Priſmata ſo einerley Höhe [33. 11.] ſich gleich wie ihre baſes verhalten. Dahero auch folglich alle Pyramiden, ſo einerley Höhe, gleich wie ihre baſes ſich verhalten werden.

Nota, Der Beweiß dieſer Prop. wird zwar ſonſt auf eine andere Art abgehandelt, ich habe aber dieſen etwas näher und deutlicher, (ob ſchon wieder die Ordnung) zu ſeyn erachtet, und dahero andere Beweiſe ausgeſetzet.

Anhang.

Ob wohl hier nur derer 3 eckichten Pyramiden gedacht worden. So iſt ſolches doch von denen andern 4. 5. 6. 7 und mehr eckichten, ebenfals

auch alſo zu verſtehen, wie itzt folgende Propoſition dargeben wird.

Die 6. Propoſition.

Alle Pyramiden ſo gleicher Höhe, verhalten ſich gegen einander gleich wie ihre baſes.

Erklärung und Beweiß.

Dieſe Propoſition iſt mit vorhergeh. 5. Propoſ. einerley, und wie dort allein von denen Pyramiden, ſo 3eckichte baſes haben, gehandelt worden, wird ſolches hiervon allen und ieden Pyramiden, (gleich als durchn Anhang erinnert) wiederhohlet. Dis durch Zahlen etwas deutlicher vorzuſtellen.

Seynd beyde Pyramiden A und B einerley Höhe 12. Der Pyramis A 3eckichte Grund-Fläche oder baſis Inhalt ſey 18. Der Pyramis B 4eckichte Grund-Fläche aber 36.

So ſagt man! daß der Pyramis A cubiſcher Inhalt 72. gegen der Pyramis B cubiſchen Inhalt 144. ſich verhalte, wie die Grund-Fläche A 18. gegen der Grund-Fläche B 36. nemlich beyderſeits wie 1 gegen 2.

Die 7. Propoſition.

Ein iedes Prisma oder 3eckichte Säule ABCDEF, wird in 3 gleich groſſe Pyramiden, deren baſes 3eckicht, abgetheilt.

Erklärung und Beweiß.

Man ziehe die Linie BF, CD und CF, So wird [34. 1.] das 4 Eck ABDF durch BF in zwey gleiche Theile, alſo auch das 4 Eck BCED durch CD, in zwey gleiche Theile zertheilet.

Läſſet man nun ABDF die Grund-Fläche, und C die obere Spitze gelten, ſo entſtehen zwey Pyramiden von gleicher Gröſſe, nemlich CABF und CBDF. Ein gleiches geſchiehet, da BDEC die Grund-Fläche, und F die obere Spitze gilt, wodurch wiederum zwey Pyramiden von gleicher Gröſſe entſtehen, nemlich: FBCD und FCDE. Weiln dann die Pyramis CBDF = der Pyramis FBCD, und alſo einerley. So folget, wie die 3 gleich groſſe Pyramiden CABF, CBDF und FCDE das gantze Prisma ABCDEF juſt ausfüllen, oder mit ſelbigen gleich groß ſeynd. So zubeweiſen war.

Anhang.

Hierdurch wird offenbar, daß eine iede Pyramide, welche mit einer Eck-Säule gleiche baſis hat, und anbey gleicher Höhe, allezeit die Pyramide, dem Dritten Theil der Eck-Säule austräget. Dahero auch einer Pyramide cubiſchen Inhalt zuberechnen. Der Grund-Fläche Inhalt, allezeit mit $\frac{1}{3}$ der Höhe multipl. wird.

Nota, Dieſe Fürgabe und Beweiß iſt eine der wichtigſten und nothwendigſten, als worauff faſt der Beweiß aller cörperlichen Figuren Soliditæt zu erforſchen, gegründet.

Die 8. Propoſition.

Gleichförmige Pyramiden ABCD und EFGH, welche zeckichte baſes A C D und EGH haben, ſtehen gegen einander in 3facher (cubiſcher) Verhältnis, ihrer proportionirten Seiten.

Erklärung und Beweiß.

Ergäntze die Pyramiden, und formire alſo beyde Parallelepipeda A I und E K, dieſe werden [9 def. 11] einander gleichförmig, und [28. 11 und 7. 12] iede Pyramis der ſechſte Theil des Parallelepipedi ſeyn. Auch gegen einander [33. 11.] in dreyfacher Verhältnis ihrer proportionirten Seiten ſtehen.

In Zahlen.

A D ſey 12. D C 8. und die Höhe D B 16. Denn E H 9. H G 6. und A F 12. Der Winckel A D C und E H G ſey ieder ein rechter Winckel.

Wie nun nach 16 und 12. denen beyden Höhen, 16. 12. 9. $6\frac{3}{4}$. die 3fache Verhältnis, iſt 16 gegen $6\frac{3}{4}$. alſo iſt der Inhalt der Pyramis ABCD 256. gegen dem Inhalt der Pyramis E F G H 108. ebenfalls wie 16 gegen $6\frac{3}{4}$.

Die 9. Propoſition.

Gleich groſſe Pyramiden, ſo zeckichte baſes, haben ihre baſes und Höhe wiederſins oder reciproce proportionirt.

Und

Und welche Pyramiden ihre baſes und Höhe wiederſins (reciproce) proportionirt haben, die ſeynd gleich groß.

Erklärung und Beweiß.

1 Satz. Weiln iede eingeſchloſſene 3 eckichte Pyramis [28. 11. und 7. 12.] des Parallelepipedi ſechſter Theil (nemlich welch Parallelep. mit der Pyramis gedoppelte Grund-Fläche hat, und unter gleicher Höhe) iſt. Und [34. 11.] alle gleich groſſe Parallelep. mit ihren Grund-Flächen und Höhen in wiederkehrlicher Verhältnüs ſtehen. Als folget, daß auch [15. 5.] deren gleichförmige Pyramiden ihre Grund-Flächen und Höhen in wiederkehrlicher Verhältnüs ſtehen, oder wiederſins proportionirt ſeyn werden. So zu beweiſen war.

2 Satz. Were vorhergehendes nicht warhafft, ſo könte dieſes auch nicht ſeyn, daß Pyramiden deren baſes und Höhe wiederſins proportionirt, gleich groß ſeyn ſolten.

In Zahlen.

1 Satz. Beyde Parallelepipeda oder Priſmata ſollen rechtwincklicht geiten. Und ſey AF 8. FG 12. und die Höhe FE 10. Ferner HI 6. ID 8. und die Höhe IB 20. Dieſem nach ſeynd beyde Pyramiden gleich groß oder eines Inhalts, nemlich 480. und haben dahero ihre baſes und Höhen wiederſinns proportionirt, alß:

Der baſin AFG Inhalt 48, iſt gegen der Hö-

he IB 20. wie baſis HID Inhalt 24. gegen der Höhe FE 10. proportionirt.

2 Satz. Weil baſis AFG 48. zu der Höhe IB 20. wie baſis HID 24 zu der Höhe FE 10. alſo wiederſins proportionirt. So ſeynd beyde Pyramiden gleiches Inhalts, nemlich iede 480. So zubeweiſen war.

Die 10. Propoſition.

Ein ieder Conus LMN iſt der Dritte Theil eines Cylindri LOPN, der mit dem Cono LMN gleiche baſin und Höhe hat.

Erklärung und Beweiß

Man beſchreibe in des Cylindri Grund-Fläche, das Quadrat ABCD, und zertheile dem Bogen DC halb. Es werde ferner formiret DGCHFI, ſo iſt der Triangel GCF = CFH, Dahero das Bogenſtück GCF allezeit gröſſer als der äuſſere übrige Theil FHC. Wenn nun der Bogen FC wieder halbirt, und das übrige auch immer continue alſo fort, ſo wird die in Circul beſchriebene Eck-Figur immer Gröſſer, die äuſere umſchriebene aber immer kleiner, und dieſemnach iſt möglich, daß die differentz endlich noch viel kleiner, alß eine iede gegebene Gröſſe K ſeyn werde.

Da nun alſo das viel-eckichte oder viel-ſeitige Priſma innerhalb des Cylindri, gegen das äuſere oder umſchriebene Priſma, ebenfalls von kleinerer differenz, als die Gröſſe K, zu machen möglich, und

und [7. 12.] iedes Priſma in dreyen gleich groſſen Pyramiden (von einerley baſis und gleicher Höhe) beſtehet, und alle hier gemachte Priſmata eben dergleichen Eigenſchafft.

So folgt! daß zwiſchen denen äuſern umbſchriebenen, und innern oder inwendig eingeſchriebenen viel-eckichten Priſmatibus, faſt gar keine differenz, oder doch allezeit kleiner, als eine gegebene geringſte Gröſſe zu finden. Und weil in dem Cono, ſo wohl auch auſſen herumb, eben dergleichen viel-eckichte Pyramiden zu beſchreiben. Als folget! daß der Conus richtig der dritte Theil des Cylindri ſeyn müſſe. So zu beweiſen war.

Anhang.

Hieraus entſtehet! daß eines Coni oder Kegels cubiſchen Inhalt zu finden oder zu berechnen, der baſis quadrirter Inhalt, mit $\frac{1}{3}$. der Höhe muß multipliciret werden.

Die II. Propoſition.

Die unter gleicher Höhe ſtehende Coni und Cylindri, verhalten ſich gegen einander, gleich wie ihre baſes.

Beweiß.

Es iſt bey vorhergehender Propoſition zu ſehen, daß es mit denen Conis eben die Beſchaffenheit, gleich denen Pyramiden, item mit denen Cylindris gleich denen Priſmatibus habe. Dieſem nach wird ſich [6. 12.] der Conus, deſſen

baſis in Diametro AB 12. gegen dem Cono, deſſen baſis in Diametro CD 6. (weil beyde einerley Höhe 18.) [1. 12.] wie 144. gegen 36. das iſt wie 4. gegen 1. verhalten.

Ebener maßen wird auch der Cylinder AB, ſich gegen dem andern Cylinder CD, wie 4. gegen 1. verhalten.

Die 12. Propoſition.

Gleich proportionirte Coni und Cylindri, ſtehen in 3.facher (das iſt cubiſcher) Verhältnüs, ihrer Höhe oder auch baſibus Diametrorum.

Beweiß.

Eben wie [33. 11.] die gleich proportionirte Parallelepipeda, und [8. 12.] Pyramiden, item [19. 8.] alle gleich-förmige Cörperliche Zahlen, in 3 facher oder cubiſchen Verhältnüs ſtehen. Eben dergleichen Bewandnüs hat es auch mit denen Conis und Cylindris, in ſumma, mit allen gleich-förmigen re- und irregulirten Cörpern. Dahero auch hier der Conus A, gegen dem Cono B, in Verhältnüs, als 16. 12. 9. $6\frac{3}{4}$. nemlich wie 16. gegen $6\frac{3}{4}$. ſtehet. Gleiche Verhältnüs haben auch beyde Cylindri gegen einander.

Die 13. Propoſition

Wenn ein Cylinder mit einer Fläche, der entgegen ſtehenden Fläche parallel,

durch-

durchſchnitten wird. So werden des Cylindri Theile, nach denen Theilen der Axis proportionirt ſeyn.

Beweiß.

Man laſſe die Ax. AB $\frac{1}{3}$. von AD, item BC $\frac{1}{6}$. von AD ſeyn. So iſt klar, daß auch des Cylindri Theil AB $\frac{1}{3}$. von dem gantzen Cylinder AD, item BC $\frac{1}{6}$. und das übrige CD, die Helffte ſeyn werde.

Die 14. Propoſition.

Coni und Cylindri auf gleichen baſibus ſtehende, verhalten ſich gegen einander, als ihre Höhen.

Beweiß.

Diß iſt vice verſa vorhergehende 11. Propoſition. Dahero ſich der Conus A gegen dem Cono B, wie 20. gegen 16. oder wie 5. gegen 4. verhält.

Eben dergleichen Verhältnüs haben auch beyde Cylindri gegen einander.

Die 15. Propoſition.

Gleicher Conorum und Cylindrorum baſes und Höhe, iſt wiederſinns, (reciprocè) proportionirt. Und welcher Conorum und Cylindrorum baſes und Höhe reciprocè proportionirt, die ſeynd auch gleicher Gröſſe.

Beweiß.

1. Satz. Weiln es mit denen Conis und Cylindris gleiche Beſchaffenheit, [10. 11.] wie mit denen Pyramidibus und Prismatibus. So folgt! daß [14. 11.] des Cylindri EH baſis Inhalt 86$\frac{5}{8}$. zu des andern Cylindri Höhe CD 12. wie des Cylindri CG baſis Inhalt 154. zu des andern Höhe EF 21$\frac{1}{3}$. Das iſt, wie 231 gegen 32. ſich verhält. Und gleiche Bewandnüs hat es auch mit denen Conis.

2. Satz. Es iſt dieſes durch vorhergehenden 1. Satz klar, daß wenn dergleichen Corpora reciprocè proportionirt, ſolche gleicher Gröſſe ſeyn müſſen.

Die 16. Propoſition.

Zwey Circul aus einem Centro A, in einander gezogen, wird verlanget, in dem gröſſern Circul ein gleichſeitig Vieleck einzuſchreiben, welches dem innern kleinern Circul nicht berühren ſoll.

Operatio.

Man ziehe dem Diameter BC, welcher dem kleinen Circkel in D durchſchneidet. In D zertheile AC winckel-recht, durch EF, dann theile den Bogen BC halb in G. Ferner GC wieder halb, und die entſtehende Helffte ebenfalls wieder halb, (gegen C zu,) biß ſo lang HC kleiner, als CE hervor komme. Mache weiter CI = CH, und ziehe HI.

Be-

Beweiß.

Weil HC durch continuirlich halbiren hervor gebracht wird, ſo iſt offenbar, daß ſolches ein gewiſſes Theil oder Seite, eines in den halben Circul BGC eingeſchriebenen Vielecks, und dahero in den gantzen Circul ein gerad oder gleichſeitiges Vieleck ſeyn werde. Da auch HI dem kleinen oder innern Circul nicht berühren kan, ſo wird noch weniger HC oder CI den innern Circul berühren. So zu beweiſen war.

Die 17. Propoſition.

Zwey Kugeln aus einem Centro D, in einander eingeſchrieben, wird verlanget, in die gröſſere Kugel ein Polyedrum oder vielſeitige Figur einzuſchreiben, welche die innere Kugel nicht berühret.

Operatio.

Man ziehe den Diameter AC, dieſer Diameter wird der kleinen Kugel Circumferentz in B durchſchneiden. Ferner rectangulatim durch B die EF gezogen/ und dem äußern halben Circul bey N in zwey gleiche Theile zertheilet. So dann AN ſo lange halbirt, bis endlich AG kleiner als AF hervorkomme. Dieſem nach wird AG eine Seite des begehrten Polyedri oder der vielſeitigen cörperlichen Figur ſeyn.

Beweiß.

Weiln HG dem innern Circul nicht berühret, ſo

ſo wird AG umb ſo viel weniger dem innern Circul oder die Kugel berühren. Es kan auch keine innerhalb der groſſen Kugel von AG formirte Fläche, die HG durchſchneiden, ſondern nur in G und H anrühren, alſo umb ſo viel weniger (weil HG die innere Kugel nicht berühret) die Fläche von AG die innere oder kleine Kugel berühren wird. Denn da aus n Centro D die perpendicular DO (ſo auf die Fläche AG gezogen wird) die kürtzte Linie, die an des Polyedri äuſere Fläche zu ziehen, So iſt klar, daß O, als welches die AG berühren muß, die innere kleine Kugel nicht berühren könne. So zu beweiſen war.

Die 18. Propoſition.

Die Kugeln ſtehen in 3 facher (das iſt cubiſcher) Verhältnüs, ihrer Diametrorum, gegen einander.

Beweiß.

Es iſt albereit bey vorhergehender 12 Propoſition erwehnet worden. Daß wie [19. 8.] alle gleich förmige cörperliche Zahlen in 3facher (oder cubiſcher) Verhältnüs ihrer proportionirten Seiten ſtehen, und daß ebener maßen auch alle andere gleichförmige Corpora dieſe Eigenſchafft haben, worunter nun die Kugeln, als gleichförmige Corpora ebenfals zu zehlen. Weiln nun ſtatt jener proportionirten Seiten, hier dafür der Diameter oder Axis Sphæræ genommen wird, ſo iſt die

die Sache an ſich ſelbſt klar, daß alle Kugeln in 3facher Verhältnüs ſtehen. Zum Exempel die Kugel AB deren Axis oder Diameter 56. verhält ſich zu der Kugel CD deren Diameter 28. wie 56. 28. 14. 7. das iſt/ wie 56 zu 7 oder wie 8 zu 1.

Nota, Weiln aber zu deſto mehrern Beweiß eben vorhergehende 17 Propoſition dienen ſoll. So iſt hierbey zu betrachten, daß es möglich, in- und außerhalb einer Kugel, gleichförmige vielſeitige Corpora zubeſchreiben, deren Differentz noch geringer, als eine iede fürgegebene Größe ſey. Weiln nun aus der Kugel Centro, erwehnte vielſeitige Corpora, in gleicher Anzahl/ und gleichförmige Pyramiden einzutheilen, deren Verhältnüs gegen einander 3fach. [8. 12.] (das iſt cubiſch.) So folget, daß auch beyder Summen, oder dero Kugeln, gegen einander 3fache Verhältnüs haben müßen.

Jedoch iſt hierbey zu erinnern, daß es nimmermehe möglich/ einer Kugel cubiſchen Inhalt, in gemeinen Zahlen accurat zu berechnen oder anzugeben, denn es iſt eben ſo unmöglich, als quadraturam circuli zu demonſtriren, wovon albereit, bey dieſes 12ten Buchs 2 Propoſition, gnüglich erwehnet worden.

Des Zwölfften Buchs Ende.

Das

Das Dreyzehende Buch EUCLIDIS.

Die 1. Propoſition.

Eine rechte Linie AB (vermöge der 11. Prop. des 2. oder 30 Prop. des 6ten Buchs) nach der äuſerſten und mitlern Verhältnüs zertheilt. So wird das quadrat, welches auf das gröſſere Theil AG und der Helffte AB, (das iſt AG + EA oder EF) beſchrieben, fünffmal ſo groß an Inhalt, alß das quadrat, welches auf die Helffte der gantzen Linie AB (das iſt EA) beſchrieben ſeyn.

Beweiß.

Durch die Operation und [11. 2.] iſt bekand, daß AF = AG, item, EB = EF

Da nun EA die Helffte von AB, ſo wird [4.2.] das quadrat von AB 4 mahl ſo groß, alß das quadrat EA, folglich [47. 1.] das quadrat EB ſo = EF 5 mahl ſo groß, alß das quadrat von EA ſeyn. So zu beweiſen war.

In Zahlen.

Man laſſe AB 10 ſeyn, ſo iſt EA 5. und EB oder

der EF $\surd$ 125. Dieſem nach ſolches quadrat EF, von AG + EA, 125. gleich 5 mal ſo groß/ alß das quadrat von EA 25.

Die 2. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie halb AB + AG (das iſt EB oder EF) in Macht fünff-fach zu dem Theil halb AB. (das iſt EA) von welchen halben Theil AB, deſſen dop-pelte oder gantze AB, in die äuſerſte und mittelſte Proportion zertheilt worden. So wird AG der gröſſere Theil, der nach der äuſerſten und mitlern Verhältnüs getheilten gantzen Linie AB ſeyn.

Beweiß.

Dieſe Propoſition iſt wie klärlich zu ſehen an-ders nichts, als vice verſa vorhergehende 1 Propo-ſition, und dahero albereit zur Gnüge erwieſen, jedoch dis noch einmahl zu wiederholen

In Zahlen.

So werde die Figur der geſagten 1. Propoſ. behalten, und ſey oder bleibe AB 10. ſo iſt AG $\surd$ 125 — 5. Dahero halb AB + AG gleich $\surd$ 125. deſſen quadrat 125 in Macht 5fach zum quadrat halb AB 25.

Dieſem nach iſt AG $\surd$ 125 — 5. der gröſſere Theil von der nach der äuſerſten und mitlern Verhältnüs getheilten gantzen Linie AB. So zu beweiſen war.

Die

Die 3. Propoſition.

Eine rechte Linie AB nach der äuſerſten und mittelſten Verhältnüs in G zertheilet. So wird das Quadrat des kleinern Theils BG + der Helffte des gröſſern Theils AG, (das iſt GM) alſo das Quadrat von BM, in Macht fünffach, des Quadrats von der Helffte des gröſſern Theils AG, nemlich von GM ſeyn.

Erklärung.

Es ſoll bewieſen werden, daß das Quadrat von MG, der fünffte Theil des Quadrats von MB ſey.

Beweiß.

Weil [30. 6.] BG zu AG, wie AG zu AB. So iſt dann [5. 7.] AG + halb AB (das iſt EB oder EF) zu halb AB (das iſt EA) wie BG + halb AG (das iſt BM) zu halb AG (das iſt GM.) Hierdurch wird erwieſen, daß EF gegen AE, wie BM gegen GM. Dahero [1. 13.] iſt das Quadrat BM fünffach in Macht, gegen dem Quadrat MG. So zu beweiſen war.

In Zahlen.

Wenn AB 10. ſo wird ſeyn AG $\sqrt{125} - 5$. BG $15 - \sqrt{125}$. Dahero $\frac{1}{2}$. AG $\sqrt{\frac{125}{4}} - 2\frac{1}{2}$. Alſo BM $12\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{125}{4}}$. Dieſem nach das Quadrat

drat von $\frac{1}{2}$ AG $\frac{150}{4} - \sqrt{\frac{12500}{16}}$. Und das Quadrat von BM $\frac{750}{4} - \sqrt{\frac{312500}{16}}$ nemlich: 5. mahl ſo groß, als das Quadrat von AG.

Die 4. Propoſition.

Eine rechte Linie AB nach der äuſerſten und mittlern Verhältnus in G zertheilt. Seynd beyde Quadrata der gantzen Linie AB und des kleinern Theils BG, zuſammen, gleich 3. mahl ſo groß, alß das Quadrat, ſo auf dem gröſſern Theil AG gemacht wird.

Beweiß.

Man formire die Figur wie zu ſehen, dabey FG = BG. Weil [11. 2. und 17. 6.] das Rectangulum von AB mit BG = dem Quadrat von AG das iſt AE. Alſo auch gleich dem Quadrat CD, item ebenfalls = dem Rectang. CB und DB. Man addire nun zuſammen die beyden Rectangula CB und DB, und noch dazu das Quadrat CD. ſo wird die Summa = denen 3. Quadraten von AG, auch = dem Quadrat von AB (da iedoch das Quadrat FB abgehet,) als ſetze dem Quadrat AB wieder hinzu das Quadrat von BG, nemlich FB. ſo wird das Quadrat AB + □ BG = ſeyn, 3. Quadraten von AG. So zu beweiſen war.

In Zahlen.

AB ſey 10. ſo iſt (wie vorhero zu ſehen,)

AG $\surd 125 - 5$. alſo deſſen Quadrat $150 - \surd 12500$. BG thut $15 - \surd 125$. alſo deſſen Quadrat $350 - \surd 112500$. zu dieſem addire das Quadrat AB, komt $450 - \surd 112500$. welches gleich 3. mahl ſo groß, alß das Quadrat von AG $150 - \surd 12500$. So zu beweiſen war.

Die 5. Propoſition.

Wenn eine rechte Linie AB, nach der äuſerſten und mitlern Proportion in G zertheilt wird, und man füget noch daran, die rechte Linie BC, gleich dem groſſern Theil AG. So wird hierdurch AC ebenfalls wiederum in B oder G, nach der äuſern und mittlern Proportion zertheilet ſeyn.

Beweiß.

Es iſt klar [2. ax. 1.] daß GC = der gantzen AB. Dahero [11. 2. und 17. 4.] wie BG zu AG, alſo AG zu GC. Folglich [5. 7.] GC zu AC in eben dergleichen Verhältnüs.

In Zahlen.

AB ſey 10. ſo iſt AG $\surd 125 - 5$. und BG $15 - \surd 125$. BC $\surd 125 - 5$. und alſo AC $\surd 125 + 5$. Dahero

wie AG	zu GC	alſo GC zu AC,
$\surd 125 - 5$	10.	10.

$$\text{komt } \frac{100}{\surd 125 - 5} = \surd 125 + 5.$$

Die

Die 6. Propoſition.

Wenn eine rational-Linie AB nach der äuſerſten und mittlern Verhältnüs in G zertheilt worden. So werden beyde Theile AG und GB irrational ſeyn, und reſidua genennet.

Erklärung und Beweiß.

Man laſſe die rational-Linie AB ſeyn 10. ſo iſt allbereit vorhero berechnet worden, daß AG $\sqrt{125} - 5$. und BG $15 - \sqrt{125}$. alſo beyde irrational, und [9. Anmerck. 10.] reſidua ſeyn.

Die 7. Propoſition.

Wenn drey Winckel eines gleich-ſeitigen Fünffecks ABCDE, entweder neben einander, als ABC, BCD und CDE, oder aber in verruckter Ordnung, als ABC, CDE und DEA, unter ſich gleich ſeynd. So wird ABCDE, ein gleich-wincklicht Fünffeck ſeyn.

Beweiß.

Man unterziehe die gleichen Winckel mit denen geraden Linien AC, BD und CE. item EF.

1. Satz. Da die gleichen Winckel neben einander. Wegen der gleichen Winckel und des Fünffecks gleichen Seiten werden [4. und 5. 1.] AC, BD und CE einander gleich ſeyn, item, da nunmehro [8. 1.] CBD = dem Winckel

ACB, ſo iſt auch BF = CF, ebener maßen AF = FD, alſo [4. 1.] der Triangel AFE = dem Triangel EFD, und folglich der Winckel BAE = CDE. Letzlich bey ſolcher Bewandnůs, auch der übrige Winckel AED = denen andern Winckeln. Dahero dieſem nach ſolch Fünffeck gleich-wincklicht. So zu beweiſen war.

2 Satz. Wenn die drey gleichen Winckel in verruckter Ordnung, wird ſolches auf eben dergleichen Art erwieſen.

Die 8. Propoſition.

Wenn man in einem gleichſeitig- und gleichwincklichten Fůnffeck ABCDE, zwey Winckel neben einander, mit geraden Linien, AC und BC unterziehet. So werden dieſe zwey Linien einander in F, nach der åuſerſten und mittlern Verhåltnůs zerſchneiden. Auch AF und FD iedes einer Seite ſolchen Fůnffecks gleich (das iſt die Seite des Fůnffecks ſelbſt) ſeyn.

Beweiß.

1. Satz. Der Winckel FBC iſt [37. 3.] = FCB, auch der Winckel BFA [32. 1.] = zwey FCB. Und da der Bogen AED = 2 AB, ſo iſt [37. 3.] der Winckel FBA = zwey FCB, conſequenter AF = AB. Auf ſolche Art wird auch erwieſen, daß DF = DC.

2. Satz.

2. Satz. Der Triangel ABC [37. 3.] iſt mit dem Triangel BFC gleich wincklicht. Dahero [4. 6.] AC zu BC, wie BC (ſo gleich FA) zu CF. Alſo verwechſelt, wie CF zu FA, alſo FA zu AC, weßwegen [17. 6.] AC proportionirt zertheilet. So zu beweiſen war.

Die 9. Propoſition.

Wenn an eines, in einen Circul beſchriebenen 10. Ecks Seite AB, noch daran gefüget wird BC, gleich der Seite des Sechsecks in ſolchen Circul beſchrieben. So wird AC nach der äuſerſten und mittlern Verhältnüs in B abgetheilet, und BC der gröſſere Theil ſeyn.

Beweiß.

Man ziehe den Diameter AE, ingleichen BD und CD. Da nun [15. 4.] BC = BD, ſo iſt [5. 1.] der Winckel BCD = BDC, und alſo auch der Winckel DBA = BAD, ebenfalls ein ieder von dieſen Winckeln [32. 1.] = BCD + BDC. Dieweiln aber AB $\frac{1}{5}$. oder der fünffte Theil des Bogens ABE, ſo folget, daß der Winckel BDE 4. mal ſo groß, als der Winckel ADB. Es iſt aber [32. 1.] der Winckel BDE = DBA + BAD, dahero dieſe zuſammen ebenfalls 4. mal (das iſt ieder zweymal) ſo groß, als der Winckel ABD. Und da wie allbereit erwieſen worden, der Winckel BCD halb ABD, weßwegen der Winckel BCD auch = ADB.

Dieſem nach ſeynd beyde Triangel ADB und ADC gleichwincklicht. Und AB zu BD (ſo gleich BC) wie AD zu AC, (ſo gleich BC) das iſt, AB zu BC, wie BC zu AC. Wodurch alſo AC nach der áuſern und mittlern Verháltnús abgetheilt, und BC das gróſſere Theil ſeyn wird. So zu beweiſen war.

Anhang.

Hieraus folget! Daß wenn die Seite, eines in einem Circul beſchriebenen regularen Sechsecks, in die áuſerſte und mittelſte Verháltnús abgetheilet worden, daß allezeit der gróſſere Theil davon die Seite eines Zehenecks in eben ſolchen Circul beſchrieben, ſeyn werde.

Die 10. Propoſition.

Wenn ein regular Fůnffeck ABCDE, in einen Circul eingeſchrieben. So vermag die Seite AB, beyde Seiten, ſo wohl des Sechsecks als auch des Zehenecks, in ſolchen Circul beſchrieben.

Erklárung.

Das Quadrat der Seite des Fůnffecks AB, iſt gleich dem Quadrat von der Seite des in ſolchen Circul einſchreibenden 6. Ecks AG, und von der Seite des Zehenecks AH zuſammen.

Operatio und Beweiß.

Ziehe den Diamet. BF, zertheile HB halb in I, und ziehe HB, HG, IG, und HL. Weil der Bogen EF = FD, und der Bogen AH halb AE, item,

item, HI, halb EF, ſo iſt [33. 6.] der Winckel AGI = halb AGF. Es iſt aber der Winckel ABG [20. 3.] auch = halb AGF. Da nun [5. 1.] der Winckel BAG = ABG. Folget! daß der Winckel ALG = AGB, und dahero beyde Triangel ALG und ABG gleich wincklicht, und AL zu AG, wie AG zu AB. Dieſem nach [17. 6.] AB mit AL = dem □ AG.

Ferner, weil wiederum der Triangel BHA, mit dem Triangel HLB gleichwincklicht, (alß woran IB = IH, dann IL perpend. auf HB, und dieſe IL beyden Triangeln IBL und IHL commun und der Winckel IBL = HBA) ſo iſt BL zu BH, wie BH zu AB. Dahero [17. 6.] BC mit AB = dem Quadrat BH oder AH. Letzlich, da [2. 2.] AB mit BL + AB mit AL = dem Quadrat AB, alſo auch = dem □ AG + □ AH. So zubeweiſen war.

In Zahlen.

Kan der Beweiß auf eins zugleich mit geſchehen, alſo:

Anhang.

Wie ein regular Fünff Sechs- und Zehen-Eck, auf eine beqveme und kurtze Manier mit eins in einem Circul einzuſchreiben.

Operatio.

Man formire das Schema der 11. Prop. des 2 Buchs, und ziehe den Circul, deſſen Semidiameter AB.

Nachdem [6.2.] DF mit AF + EA □ = EF □ oder BE □. Und man nimmt beyderſeits weg EA □. ſo bleibt DF mit AF ＿ AB □. Dahero [11.2.] AF zu DA, wie [5.13.] DA zu DF. Dieſemnach iſt [15.4.] AB die Seite des Sechsecks. Und [9.13.] AF die Seite des Zehenecks, BF aber [10.13.] die Seite des Fünffecks, in einerley Circul eingeſchrieben.

In Zahlen.

Sey der Semidiameter AB 1. Dieſemnach komt EA $\frac{1}{2}$ und EB (ſo = EF) $\sqrt{1\frac{1}{4}}$.

Dahero iſt die Seite des Sechsecks AB 1.
Die Seite des Zehenecks AF $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$
Und die Seite des Fünffecks BF $\sqrt{:2\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}}$.

Die II. Propoſition.

Wenn in einen Circul, deſſen Diameter DC rational, ein regular Fünffeck eingeſchrieben wird. So iſt dieſes Fünff-Ecks Seite BF irrational, und wird Minor (die kleine Linie) genennet.

Erklärung und Beweiß.

Es bleibe noch die letztere Figur. Und ſey der Diameter DC 2. alſo rational. Da dann albereit in vorherbefindlichen Anhang berechnet worden, daß die Seite des regularen Fünffecks BF $\sqrt{:2\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}}$ alſo irrational, und [95. 10.] Minor, oder eine kleine Linie, ſeyn wird. So zubeweiſen war.

Die

Die 12. Propoſition.

Ein regular oder gleichſeitiges Drey-Eck ABC, in einem Circul eingeſchrieben. Iſt das Vermögen einer Seite dieſes Triangels AC, dreyfach, des Semidiametri DB.

Beweiß.

Man ziehe den Diameter BE, dann auch AE. Da nun AE = EC der ſechſte Theil von der Circumferenz, Dahero AE [15.4.] = DE, Ferner, weil [4.2.] BE □ = 4 DE □ (das iſt 4 AE □) ſo iſt [47.1.] AE □ 1. und A ß = 3 AE □ Welches zubeweiſen war.

In Zahlen.

DE oder AE ſey 1. alſo iſt BE 2. Dahero von Quadrat BE 4. das Quadrat AE 1. ſubtrahirt, reſtirt vor AB Quadrat 3. welches alſo in Macht 3 mal ſo groß als AE oder DB Quadrat.

Die 13. Propoſition.

In eine gegebene Sphæra oder Kugel, ein Tetraedrum oder das Erſte Corpus regulare einzuſchreiben, und zubeweiſen, daß der Kugel-Diameter oder Axis Sphæræ DF oder HI in Macht, gegen einer Seite des Tetraedri AD oder HL, wie 3 gegen 2 ſey.

Erklärung und Beweiß.

Man formire beyde Figuren wie zuſehen.

Da nun ED (ſo gleich HK geſetzet wird) perpendicular auf des Tetraedri Grund-Fläche ABC, und dieſemnach die rechten Winckel DEA, DEG, DEB und DEC = dem rechten Winckel HKL, item, EA, EG, EB und EC = KL, Ebenfals DA, DB und DC = HL.

Ferner da [12. 13.] EC = KL, ſo iſt auch [12. 13.] HL Quadrat = 3 KL Quadrat, und [47. 1.] HK□ = 2 KL□.

Letzlich, weil [8. 6.] HK zu HL, wie HL zu HI. So folget! daß die Seite des Tetraedri HL, zu der Kugel-Diameter oder Axis Sphæræ HI, in Macht wie 2 gegen 3 (nemlich wie HK □2, zu HL□3.) ſich verhalte. So zubeweiſen war.

In Zahlen.

KL ſey 1. ſo iſt HK $\surd$ 2. HL $\surd$ 3. Dahero wie HK $\surd$ 2 zu HL $\surd$ 3. alſo HL $\surd$ 3 zu HI $\surd 4\frac{1}{2}$. Das iſt HL $\surd$ 3 iſt zu HI $\surd 4\frac{1}{2}$ in Macht ermeßlich, wie 2 gegen 3.

Die 14. Propoſition.

In eine gegebene Kugel ein Octaedrum oder das Zweyte Corpus regulare einzuſchreiben, und zubeweiſen. Daß der Kugel Diameter AC, gegen die Seite des Octaedri AE, in Macht wie 2 gegen 1 ſey.

Erklä-

Erklärung und Beweiß.

Mann formire das Schema oder Figur wie zuſehen. Da AECG die gegebene Kugel. Weiln nun das Octaedrum in zwey gleichförmigen Pyramiden ADEFG und CDEFG beſtehet. So wird der Circul GDEF, die Kugel gleich mitten in zwey gleiche Theile zertheilen, und das Quadrat GDEF (aus 4 des Octaedri Seiten beſtehende) darinne eingeſchrieben, und B, ſo wohl dieſes Quadrats GDEF, als auch der Kugel Centrum ſeyn.

Und alſo [117. 10.] der Kugel Diameter oder Axis Sphæræ AC gegen der Seite AE des Octaedri, in Macht ermeßlich, wie 2 gegen 1 ſich verhalten.

In Zahlen.

Der Kugel Diameter AC ſey 2. ſo iſt [117 10.] die Seite des Octaedri AE $\surd 2$. Das iſt in Macht AC $\surd 4$. gegen AE $\surd 2$. wie 2 gegen 1.

Die 15. Propoſition.

In eine gegebene Kugel ein Hexaedrum oder Cubum, das Dritte Corpus regulare einzuſchreiben, und zubeweiſen. Daß der Kugel Diameter gegen des Cubi Seite, in Macht wie 3 gegen 1 ſich verhalte.

Erklärung und Beweiß.

Man formire die dazu erforderliche Figur wie zu

zuſehen. Da iſt nun ACGI die gegebene Kugel, der eingeſchriebene Cubus aber ABCDFGHI. Woraus klar und deutlich zu ſehen, wie der Cubus in der Kugel alſo eingeſchloßen: daß in ſolcher Kugel ein rechtwincklichter Triangel CGI entſtehet oder darinne enthalten, daran baſis CG, des Cubi Seite, GI cathetus (welches die diagonal Linie des Quadrats FGHI des Cubi Fläche) und IC hypotenuſa, der Kugel Diameter oder Axis Sphæræ iſt.

Dahero dann [117. 10.] GI gegen GC in Macht doppelt. Und da [47. 1.] IC□ = GI□ + CG□. So iſt der Kugel Diameter IC, gegen des Cubi Seite CG, in Macht wie 3 gegen 1. So zubeweiſen war.

In Zahlen.

Die Seite des Cubi CG ſey 1. ſo iſt GI $\sqrt{2}$. und der Diameter CI $\sqrt{3}$. alſo in Macht ermeßlich wie 1 gegen 3. oder 3 gegen 1.

Die 16. Propoſition.

In eine gegebene Kugel ein Icoſaedrum oder das Vierte corpus regulare einzuſchreiben, und zubeweiſen: daß des Icoſaedri Seite irrational und Minor, oder eine kleine Linie ſey.

Operatio und Erklärung.

Man formire die hierzu erforderliche Figur wie zuſehen.

Alda iſt ABCDEF, die gegebene Kugel, der

Kugel

Kugel Diameter oder Axis Sphæræ iſt BE, der Kugel Centrum iſt F, und des Icoſaedri Seite iſt AB

Woraus erhellet, daß in ſolcher Kugel aus 5 des Icoſaedri Seiten AG, GH, HI, IK und KA, ein regulares Fünffeck entſtehet, welches in einem Circul, deſſen Diameter AC iſt, eingeſchrieben, wovon die Ecken, ſo wohl dieſes Circuls Circumferenz, als auch der Kugel äuſere Superficies berühren werden. Ferner entſtehet ein Pyramis BAGHIK, da baſis vorerwehntes regulare 5 Eck AGHIK, und deſſen Höhe BR. Welche Pyramis ebenfals mit allen Ecken die Kugel berühret, und darinne [31. def. 11.] eingeſchloſſen oder eingeſchrieben.

Beweiß.

Aus itzt beſchehenen folget: Daß das Quadrat von AR [35. 3.] = dem Rectangulo ER mit BR. Auch [31. 3 und 8. 6.] die Triangel ABR, AER und ABE, rechtwincklichte und gleichförmige Triangel seyn. Und demnach AR [13. 6.] das Medium proportionale zwiſchen BR und ER ſey.

Läſſet man nun AR 1 gelten, ſo iſt [Anhang 10. 13.] AG (ſo gleich der Seite AB) $\sqrt{:2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. nemlich eine Seite des Icoſaedri, alſo irrational, und [95. 10 und 11. 13.] linea Minor, oder kleine Linie. So zubeweiſen war.

Anhang.

Wenn AB $\sqrt{:2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. und AR 1. ſo komt BR $\sqrt{:1\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ ſo $= \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$.

Ferner iſt BR $\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$. zu AR 1. wie AR 1 zu

RE

RE. Dieſem nach thut RE $\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$. zu dieſem RE $\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$. addire BR $\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$. bringt hervor der Kugel Diameter oder Axis Sphæræ BE $\sqrt{5}$.

Die 17. Propoſition.

In eine gegebene Kugel ABCDLN, ein Dodecaedrum oder das fünffte corpus regulare einzuſchreiben, und zu beweiſen. Daß des Dodecaedri Seite AB irrational, und ein reſiduum ſey.

Operatio und Erklärung.

Man formire die dazu behörige Figur wie zuſehen.

Hierbey iſt nun ABCDLN die gegebene Kugel, AB aber des Dodecaedri Seite, und K der Kugel Centrum. Zu förderſt iſt zu wißen, daß wenn dergleichen Corpus auf eine Spitze L geſtellet wird, ſolches ſo dann oben eine Pyramide BAFC enthält, deren Grund-Fläche ein gleichſeitiger Triangel ACF, deſſen iede Seite eine diagonal des regularen Fünffecks (von der Seite des Dodecaedri AB formirt) iſt. Dieſer Pyramis Höhe zeiget BM, es werden auch deren Ecken A, C, F und B die Kugel berühren, und alſo hier durch die Pyramis BAFC, in die Kugel eingeſchloſſen oder [31 def. 11.] darinne eingeſchrieben ſeyn.

Beweiß.

Man laſſe den Semidiameter AM (des Circuls worinne der gleichſeitige Triangel ACF eingeſchrieben) 1 gelten. So wird [12. 13.] AC $\sqrt{3}$ halten. Dieſe AC [30. 6.] in die äuſere und mittlere

lere Verhältnüs zertheilt, ſo iſt [8. 13.] der gröſſere Theil davon AB des Dodecaedri Seite, welche bey Berechnung hervor bringt $\sqrt{3\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{3}{4}}$. ſo irrational und ein reſiduum iſt. Wie zu beweiſen war.

Anhang.

Subtrahirt man das quadrat AM 1. von quadrat AB $4\frac{1}{2} - \sqrt{11\frac{1}{4}}$ reſtirt $3\frac{1}{2} - \sqrt{11\frac{1}{4}}$ hieraus rad. quadr. thut $\sqrt{:3\frac{1}{2} - \sqrt{11\frac{1}{4}}}$ der Pyramis Höhe BM. ſo $= 1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$.

Weiln nun ABM, ALM und ABL [31. 3. und 8. 6.] recht winckliche und gegen einander gleichförmige Triangel. So wird ſeyn, BM $1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. gegen AM 1. wie AM 1. gegen ML. komt vor ML $1\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$. hierzu addire BM $1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. dis bringt hervor der Kugel Diameter oder Axis Sphæræ BL 3.

Die 18. Propoſition.

Derer (in vorhergehender 13. 14. 15. 16 und 17 Propoſition angeführten) fünff regularen Cörper Seiten zu ſtellen, und zu beweiſen, wie ſich ſelbige gegen einander vergleichen.

Operatio und Erklärung.

Man formire die hierzu erforderliche Figur, wie zu ſehen alſo:

AB ſey der Kugel Diameter oder Axis Sphæræ, C das Centrum. Dann AE der dritte Theil von AB. Stelle in B auf AB, die perpendicular BG, gleich lang AB. Ziehe CG, und ſtelle ferner die

per-

perpendicular Linien EF, CD und HI. Es werde auch AF gezogen, und dieſe AF in K, nach der äuſern und mittlern Verhältnüs [30. 6.] zertheilt. Letzlich ziehe auch noch HL, parallel mit AB. So wird ſeyn

BF die Seite des Tetraedri
BD die Seite des Octaedri
AF die Seite des Hexaedri oder Cubi
BH die Seite des Icoſaedri, und
AK die Seite des Dodecaedri.

Beweiß.

1 Satz. Weil AE $\frac{1}{3}$ von AB, ſo iſt EB $\frac{2}{3}$. dieſemnach [13.6] FE $\sqrt{\frac{2}{9}}$. und [47. 1.] BF $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Dahero ſtehet der Diameter AB 1 oder $\sqrt{1}$. gegen BF $\sqrt{\frac{2}{3}}$. in Macht wie 3 gegen 2. Folglich iſt [13. 13.] BF des Tetraedri Seite. So zu beweiſen war.

2 Satz. In dem CB $\frac{1}{2}$. CD auch $\frac{1}{2}$. ſo iſt [47. 1.] BD $\sqrt{\frac{1}{2}}$. gegen AB $\sqrt{1}$ in Macht wie 1 gegen 2. Dahero [14. 13] BD des Octaedri Seite.

3 Satz. Nachdem AE $\frac{1}{3}$. und FE $\sqrt{\frac{2}{9}}$. ſo iſt AF $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Alſo AB $\sqrt{1}$. gegen AF $\sqrt{\frac{1}{3}}$. in Macht wie 3 gegen 1. Dahero [15. 13.] iſt AF des Cubi Seite.

4 Satz. CB iſt $\frac{1}{2}$. und BG 1. dieſemnach [47. 1.] CG $\sqrt{1\frac{1}{4}}$. Wie nun CG $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ zu BG 1. alſo iſt CH $\frac{1}{2}$. zu HI, komt HI $\sqrt{\frac{1}{5}}$. Ferner, wie CG $\sqrt{1\frac{1}{4}}$. zu CB $\frac{1}{2}$. Alſo GH $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. zu HL, komt hervor $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{20}}$ vor HL $=$ IB. dis IB quadrirt, thut $\frac{6}{20} - \sqrt{\frac{1}{20}}$. hierzu das quadrat HI $\frac{1}{5}$ addirt, giebt

$\frac{1}{2}$ —

$\frac{1}{2} - \surd \frac{1}{20}$ deſſen rad. quadr $\surd : \frac{1}{2} - \surd \frac{1}{20}$ iſt BH, die Seite des Icoſaedri. Da nun HI $\surd \frac{1}{5}$ gegen AB $\surd$ 1. in Macht wie 1 gegen 5. [und ein glei⸗ches Anh. 16. 13. durch AR gegen BE beſunden worden.] Dahero iſt [16. 13.] BH die Seite des Icoſaedri.

5 Satz. Wie oben beyn 3ten Satz zuſehen, iſt AF $\surd \frac{1}{3}$ welch AF, nach der äuſern und mitlern Verhältnüs zertheilt, dem gröſſern Theil AK $\surd \frac{5}{12} - \surd \frac{1}{12}$ vor des Dodecaedri Seite hervor⸗bringet. Da nun AK $\surd \frac{5}{12} - \surd \frac{1}{12}$. gegen AB 1: wie bey vorhergehender 17 Propoſ. [AB $\surd 3\frac{3}{4} - \surd \frac{3}{4}$. gegen BL 3.] So iſt AK die Seite des Do⸗decaedri. Welches zubeweiſen war.

Anhang.

Solcher 5 regularen Cörper proportion, oder Verhältnüs, deren Seiten, Flächen, und cör⸗perlichen Inhalt, kan noch etwas deutlicher durch folgenden Entwurff vorgeſtellet werden, nemlich:

Man laſſe dem Diameter einer Kugel oder Axis Sphæræ 2 ſeyn, ſo iſt

des Tetraedri Seite $\surd 2\frac{2}{3}$ oder 1. $\frac{632993}{1000000}$
des Octaedri Seite $\surd 2$ - 1. $\frac{414213}{1000000}$
des Cubi - - - $\surd 1\frac{1}{3}$ - - 1. $\frac{154700}{1000000}$
des Icoſaedri $\surd : 2 - \surd \frac{4}{5}$ - - 1. $\frac{51462}{1000000}$
des Dodecaedri $\surd 1\frac{2}{3} - \surd \frac{1}{3}$ - - 1. $\frac{713644}{1000000}$

Ferner

der Kugel Circumferentz 6. $\frac{283185}{1000000}$
der Kugel mittlere Circul⸗Fläche 3. $\frac{141592}{1000000}$

der Kugel äuſerere Fläche	$12.\frac{566370}{1000000}$
der Kugel cörperlicher Inhalt	$4.\frac{188790}{1000000}$
Item	
des Tetraedri äuſere Fläche	$4.\frac{618802}{1000000}$
der cörperliche Inhalt	$0.\frac{769800}{1000000}$
des Octaedri äuſere Fläche	$6.\frac{928203}{1000000}$
der cörperliche Inhalt	$1.\frac{333333}{1000000}$
des Cubi äuſere Fläche	8.
der cörperliche Inhalt	$1.\frac{539600}{1000000}$
des Icoſaedri äuſere Fläche	$9.\frac{574541}{1000000}$
der cörperl. Inhalt	$2.\frac{536150}{1000000}$
des Dodecaedri äuſere Fläche	$10.\frac{514622}{1000000}$
der cörperl. Inhalt	$2.\frac{785163}{1000000}$

Und iſt ferner nicht möglich, noch über dieſe 5 corpora regularia ein⸗oder mehrere corpora regularia zu machen oder auszufinden. Denn weiln [10. ax. 1.] eine iede Fläche 360 Grad hält, weßwegen ein ieder rechtliniſcher cörperlicher Winckel [21. 12.] allezeit weniger als 360 Grad, oder 4 rechte Winckel halten muß.

So folget! Daß nach dem die erſte rechtliniſche regulare Fläche, in einen gleichſeitigen Triangel beſtehet. Man dahero

1. Aus 3 ſolchen gleichſeitigen Triangeln einen cörperlichen Winckel von 3 mal 60 Grad, das iſt 180 Grad ſtellen, und daraus das Tetraedrum formiren möge.

2. Aus 4 Triangeln einen cörperlichen Winckel von 240 Grad zuſammen geſetzt, giebt das Octaedrum oder Zweyte Corpus regulare.

3.

3. Aus 5 dergleichen Triangeln, einem cörperlichen Winckel zuſammen geſetzt von 300 Grad. giebt das Icoſaedrum in dieſer Ordnung das dritte Corpus regulare dar.

Aus 6 gleichſeitigen Triangeln aber, iſt ferner kein Corpus regulare zu formiren, weil deſſen 6 Winckel zuſammen 360 Grad, oder 4 rechte Winckel, id eſt eine Fläche ausmachen.

4. Aus 3 Quadraten kan ein cörperlicher Winckel, und alſo das vierte Corpus regulare, der Cubus formiret werden.

Sonſt auſſer dem, iſt mit denen Quadraten weiter kein Corpus regulare zu formiren, in dem fernerhin 4 Quadrata zuſammen geſetzt, albereit deren 4 Winckel zuſammen 360 Grad, oder 4 rechte Winckel, id eſt eine Fläche ausmachen.

5. Aus drey regularen Fünffecken, wovon ieder Winckel 108 Grad hält, iſt wiederum ein cörperlicher Winckel von 324 Grad zuſammen zuſetzen, und hierdurch das Fünffte Corpus regulare oder Dodecaedrum hervor zubringen. Hingegen kan ebenfals ferner weit mit denen regularen 5 Ecken, keine Corpus regulare mehr gemachet werden, weil 4 dergleichen 5 Ecke nicht zuſammen zubringen, in dem deren Winckel ſämtlich 432 Grad alſo über 4 rechte Winckel betragen.

Von denen regularen 6 Ecken iſt kein Corpus regulare zu effectuiren, ſintemaln 3 regulare 6. Eck zuſammen gebracht ihre 3 Winckel 360 Grad

alſo 4 rechte Winckel oder eine Fläche ausmachen.

Noch weniger können drey regulare Sieben-Acht-Neun-Zehen-und mehr eckichte Figuren allein, zu cörperlichen Winckeln gebracht werden, weiln aus zwey Flächen (rechtliniſche Flächen zu verſtehen) kein cörperlicher Winckel zu machen. Dahero dann auch nicht möglich, auſſer denen oberwehnten von Euclide beſchriebenen Fünff regularen Cörpern, einig anderes Corpus regulare hervorzubringen.

Es iſt zwar zur gnüge bekand, wie unzehlige andere mit regularen Flächen beſchloſſene eckichte in runde Corpora hervor zu bringen ſeynd, deren insonderheit Albrecht Dürer eine ziemliche Parthey vorgeſtellet: Dieſe aber können hieher keinesweges gerechnet, oder unter die corpora regularia mit gezehlet werden. Indem ein Corpus, welches aus gleichſeitigen Triangeln und Quadraten zu gleich zuſammen geſetzt worden, ſolte es auch mit allen Ecken eine darum beſchriebene Kugel berühren, vor kein Corpus regulare anzunehmen oder zuerkennen.

Wie die 5 corpora regularia, mit gemeinen Zahlen berechnet werden, iſt in denen Mathem. Demonſtr. albereit ausführlich angewieſen worden, auch wie ſelbige von Pappier oder anderer Materia zuſammen zuſetzen, welches letztere durch beygefügte Figuren hier ebenfals wieder angewieſen wird.

Des Dreyzehenden Buchs Ende.

Das

Das Vierzehende Buch EUCLIDIS.

Die 1. Propoſition.

Wenn in einem Circul ein regular Fünff-Eck deſſen Seite AB eingeſchrieben, und man auſſn Centro C eine rechte Linie CE perpendicular auf AB ziehet. So wird CD gleich die Helffte ſeyn, nemlich: Von der Seite CE eines Sechsecks, und der Seite AE eines Zeheneck's zuſammen.

Erklärung und Beweiß.

Man erlängere CE alſo: daß AG = AC. Mache DF = DE, und ziehe AF.

Da nun [Propoſ.] der Winckel ACE der Fünffte Theil von 2 rechten Winckeln, und [5. 1.] der Winckel CAE = AEC, alſo ieder $\frac{2}{5}$. von zweyen rechten Winckeln, auch der Winckel AFE = AEC. So folgt! daß der Winckel EAF ebenfals $\frac{1}{5}$ von 2 rechten Winckeln und = die Helffte des Winckels CAE ſey, dahero auch gleich dem Winckel CAF = ACF, weßwegen [5. 1.] FC = AF oder = AE. Alſo iſt in Anſehung der rechten Winckel ADC und ADG. auch gleichen Seiten AC und AG. die EG = FC = der Seiten des 10 Ecks AE. Und folglich

DC die Helffte von CE + EG. alß der Seite eines Sechs- und Zehenecks zuſammen. So zubeweiſen war.

Die 2. Propoſition.

Wenn man zwey rechte Linien AB und CD, iede beſondern, nach der äuſern und mitlern Verhältnüs in E und F zertheilet. So werden der einen Linie AB ihre Theile, eben diejenige Verhältnüs, wie der andern Linie CD ihre Theile, haben.

Beweiß.

Dis iſt [15. 5. und 67. 10.] eine an ſich ſelbſt offenbare Sache, ſolches iedoch beſſer zu erklären.

In Zahlen.

Sey AB 12. kommt [11. 2.] der gröſſere Theil AE $\sqrt{180} - 6$. und der kleinere Theil EB $18 - \sqrt{180}$.

Ferner ſey CD 4. komt der gröſſere Theil CF $\sqrt{20} - 2$. und der kleinere Theil FD $6 - \sqrt{20}$. Dahero

wie AE gegen EB. alſo CF gegen FD.

$\sqrt{180} - 6 \quad 18 - \sqrt{180} \quad \sqrt{20} - 2 \quad 6 - \sqrt{20}$.

Das iſt in Länge ermeßlich wie 3. gegen 1.

Die 3. Propoſition.

Ein Circul FBCDGEH enthält zugleich die Fläche eines regularen Fünffecks ABCDE des Dodecaedri, als auch dem regularen Trian-

angel FCG des Icoſaedri, beyde in einerley Kugel eingeſchrieben.

Erklärung und Beweiß.

Man laſſe CF eine Seite des Icoſaedri und BC die Seite des Dodecaedri ſeyn. Es werde auch der Diameter CH gezogen. Es ſey ferner der Semidiameter IH 1. Dieſem nach wird [11. 13.] des regularen Fünffecks Seite BC $\sqrt{:2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. und [12. 13.] die Seite des regularen 3.Ecks CF $\sqrt{3}$. halten.

Da nun [18. 13.] derer (in eine Kugel beſchriebenen) fünff regularen Cörper Seiten, ebenfalls des Dodecaedri Seite, ſich gegen des Icoſaedri Seite verhält, wie $\sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{1}{12}}$ zu $\sqrt{:\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{20}}$.

In eben dieſer Verhältnüs ſtehet dann auch die Seite des Dodecaedri BC $\sqrt{:2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. zu der Seite des Icoſaedri CF $\sqrt{3}$. So zu beweiſen war.

Nota, einem in der Algebra nicht allzugeübten, dürffte dieſe Verhältnüs $\sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{1}{12}}$ zu $\sqrt{:\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{20}}$. wie $\sqrt{:2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. zu $\sqrt{3}$. nicht allzu deutlich, oder zu examiniren etwas beſchwerlich fallen. Dieſen Zweiffel nun vorzukommen, iſt es alſo zu reſolviren.

Man multiplicire [19. 7.] $\sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{1}{12}}$ mit $\sqrt{3}$. bringt $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. Multiplicire auch $\sqrt{:\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{20}}$ mit $\sqrt{:2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. komt $\sqrt{:1\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. deſſen radice iſt $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} =$ vorhero.

Die 4. Propoſition.

Wenn das regulare Fünffeck ABCDE, eines Dodecaedri, in einem Circul eingeſchrieben, und ausn Centro die perpendicular FG gezogen worden. So wird das Rectangulum, von der Seite AE und der perpendicular FG beſchloſſen, der dreyßigſte Theil, der äuſern Superfies des Dodecaedri ſeyn. Desgleichen wenn eines Icoſaedri Triangel KLM in einem Circul eingeſchrieben, ausn Centro N, die perpendicular NO gezogen worden. So wird das rectangulum von KM und NO beſchloſſen, auch der dreyßigſte Theil der äuſern Superficies des Icoſaedri ſeyn.

Beweiß.

1. Satz. Das alſo formirte Rectangulum AHIE, iſt gleich doppelt ſo groß, [41. 1.] alß der Triangel AFE.

Da nun des Dodecaedri äuſere Superficies in 12. Fünffecken beſtehet, welche 60. Triangel AFE oder 30. Rectangula AHIE austragen. So folget, daß AHIE der geſagte 30ſte Theil ſey. So zu beweiſen war.

2. Satz. Der Triangel KNM iſt der dritte Theil des Triangels KLM. Dahero des Icoſaedri äuſere Fläche 60. Triangel KNM oder 30. Rectangula KPQM (von KM und NO beſchloſſen,) austräget. So zu beweiſen war.

Die

Die 5. Propoſition.

Die åuſere Flåche oder Superficies eines Dodecaedri, hat zu der åuſern Flåche eines Icoſaedri, die ſelbige Verhåltnůs, als die Seite eines Cubi, gegen der Seite des Icoſaedri, in einerley Kugel eingeſchrieben.

Erklårung und Beweiß.

Formire die erforderliche Figur vorhergehender 3. Propoſition conform, wie zu ſehen. Allwo der Triangel ABC eines Icoſaedri, und das Fünffeck AKEDI, des Dodecaedri åuſere Flåche. Iſt nun der Semidiameter AF 1. ſo wird [12.13.] BC $\surd 3$. und [47. 1.] FG $\frac{1}{2}$ DE aber [11. 13.] $\surd : 2\frac{1}{2} - \surd \frac{5}{4}$ und [47. 1.] FH $\surd \frac{5}{16} + \frac{1}{4}$. ſeyn. Weiln nun [18. 13.] die Seite eines Cubi gegen der Seite eines Icoſaedri, wie $\surd \frac{1}{3}$ gegen $\surd : \frac{1}{2} - \surd \frac{1}{20}$.

So wird auch ſeyn [4. 14.] wie DE $\surd : 2\frac{1}{2} - \surd \frac{5}{4}$. mit FH $\surd \frac{5}{16} + \frac{1}{4}$. mult. gegen BC $\surd 3$. mit FG $\frac{1}{2}$. mult. (das iſt, 20. Rectang. von DE und FH beſchloſſen, gleich 20. Rectang. von BC mit FG beſchloſſen.)

Nota, dieſer Beweiß oder Approbation in Zahlen iſt alſo zu berechnen.

Das □ DE thut $2\frac{1}{2} - \surd \frac{5}{4}$. deſſen vierter Theil iſt $\frac{5}{8} - \surd \frac{5}{64}$. vor das □ DH, ſolches ſubtrahire von □ DF 1. nemlich

$1 + \sqrt{0}$

$\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}$

Reſt $\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$. vor das □ FH. deſſen Quadrat-Wurtzel $\sqrt{:}\,\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$ iſt FH.

Multiplicire dann $\sqrt{:}\,2\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ mit $\sqrt{\frac{5}{16}} + \frac{1}{4}$ ($\sqrt{\frac{5}{16}} + \frac{1}{4}$ wird hier erſtlich quadrirt,) ſo $\sqrt{:}\,\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$ hervor bringt, dahero

$\sqrt{:}\,2\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ mit $\sqrt{:}\,\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$ mult.

$\frac{15}{16} - \sqrt{\frac{45}{256}}$

$- \frac{5}{16} + \sqrt{\frac{125}{256}} - \frac{5}{16}$

$\sqrt{:}\,\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$.

Nun ſtehet die Verhältnüs alſo:

Wie $\sqrt{\frac{1}{3}}$ zu $\sqrt{:}\,\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{20}}$ alſo $\sqrt{:}\,\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$ zu $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Dahero [16. 6.] $\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{3}{4}}$. mult. giebt $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ſo gleich $\frac{1}{2}$. (Und ſo viel iſt auch $\sqrt{:}\,\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{20}}$ mit $\sqrt{:}\,\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$ mult. nemlich)

$\sqrt{:}\,\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{20}}$ mit $\sqrt{:}\,\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$

$\frac{5}{16} - \sqrt{\frac{5}{256}}$

$- \frac{1}{16} + \sqrt{\frac{5}{256}} - \sqrt{\frac{1}{256}} = \frac{1}{16}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ oder $= \frac{1}{2}$. wie begehrt.

Die 6. Propoſition.

Eine rechte Linie AB, nach der äuſerſten und mittlern Verhältnüs in C zertheilt, ſo ſoll BI (welche die ganze AB und das gröſ-

ſere

ſere Theil AC vermag,) gegen die rechte Linie KL (welche die ganze AB und das kleinere Theil BC vermag.) ſeyn, wie des 5. Ecks Diagonal-Linie BG, als die Seite des Cubi, gegen des 3. Ecks Seite BH, als die Seite des Icoſaedri, beyde in einerley Kugel eingeſchrieben.

Erklärung und Beweiß.

AB ſey der halbe Diameter, ferner BDFGI das 5. Eck eines Dodecaedri, und BEH das 3 Eck eines Icoſaedri. Weiln nun [8. und 18. 13.] BG die Seite eines Cubi, und BI die Seite eines Dodecaedri, beyde in einerley Kugel eingeſchrieben. Auch [3. 14.] BI die Seite des Dodecaedri, und BH die Seite des Icoſaedri, beyde in einerley Kugel eingeſchrieben. So iſt klar, daß ebenfalls BG die Seite eines Cubi, und BH die Seite eines Icoſaedri, in einerley Kugel eingeſchrieben ſeyn.

Ferner iſt [9. 13.] AC die Seite eines Zehen-Ecks, und [10. 13.] BI die Seite des 5 Ecks, und das Quadrat KL = [4. 13.] 3. Quadrat AC, auch BH□ = [12. 13.] 3. AB□. Alſo [15. 5.] BH□ zu KL□, wie AB□ zu AC□. und [8. 13.] BG□ zu BI□. Dahero BI zu KL, wie BG zu BH, ſo noch zu beweiſen war.

In Zahlen.

Wenn AB 1. ſo iſt AC $\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$. und BC

1 $\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$. dann BI $\sqrt{}:2\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$. und KL $\sqrt{}:4\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{45}{4}}$. AM thut $\sqrt{\frac{5}{16}}+\frac{1}{4}$. alſo BM $\sqrt{\frac{5}{16}}+\frac{5}{4}$. GM iſt $\sqrt{}:\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}$. Dahero BG $\sqrt{}:2\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$ und BH $\sqrt{3}$.

Wie nun BI $\sqrt{}:2\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$ gegen KL $\sqrt{}:4\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{45}{4}}$ alſo iſt BG $\sqrt{}:2\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$ gegen BH $\sqrt{3}$.

Denn [16. 6] BI mit BH multiplic. bringt $\sqrt{}:7\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{45}{4}}$. Und KL mit BG multiplicirt, auch $\sqrt{}:7\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{45}{4}}$. (vide pag, 60.)

Anhang,

Hieraus folget, daß wenn ein regular 5. Eck und auch zugleich ein regular 3. Eck, in einem Circul eingeſchrieben.

Des 5 Ecks Seite, die Seite des Dodecaedri.
Des 3 Ecks Seite, die Seite des Icoſaedri.
Des 5 Ecks Diagonal-Linie, die Seite des Cubi.
} In einerley Kugel beſchrieben, ſeynd.

Die 7. Propoſition.

Ein Dodecaedrum verhält ſich zu einen Icoſaedrum (an cubiſchen Inhalt) als wie die Seite des Cubi, gegen der Seite des Icoſaedri, in einerley Kugel eingeſchrieben, ſich verhält.

Erklärung und Beweiß.

Hierzu wieder, die Figur vorherg. 3 Propoſition. Weil [3. 14.] ein Circul, ſo wohl das 3 Eck des Icoſaedri äuſern Fläche, als auch das 5 Eck des Dodecaedri äuſern Fläche, enthält, und ſolche Cir-

Circul, als auch die Ecken derer eingeſchriebenen Flächen, die Kugel berühren müßen. So werden aus Centro der Kugel, bis ins Centrum I (derer Flächen) die perpendicular Linien [47. 1. und 14. 3.] einander gleich ſeyn, und demnach beyderſeits Pyramiden gleiche Höhe haben. Folglich deren Inhalt [6. 12] wie deren äußere Flächen ſich gegen einander verhalten. Das iſt [5. 14] des Dodecaedri Inhalt, gegen des Icoſaedri Inhalt wird ſeyn, wie die Seite des Cubi, gegen der Seite des Icoſaedri, in einerley Kugel beſchrieben. So zu beweiſen war.

Die 8. Propoſition.

Ein Circul enthält zu gleich das quadrat ABCD, eines Cubi, als auch das regulare 3 Eck AFG, des Octaedri, in einerley Kugel eingeſchrieben.

Beweiß.

Der Kugel Diameter ſey HI. und E des Circuls Centrum. Da nun [15. 13.] das □ HI, gegen dem □ des Cubi Seite AB wie 3 gegen 1. und AE = BE. Dahero [47. 1.] HI □ = 6 AE □. Es iſt auch [14. 13.] das □ HI gegen dem □ AF wie 2 gegen 1. item [12. 13.] AF □ = 3 AE □. dieſemnach HI □ wiederum = 6 AE □. Folgt, daß das □ ABCD und das 3 Eck AFG beyde in einerley Circul ADGCFD und gleicher Kugel HI eingeſchrieben. So zu beweiſen war.

Des vierzehenden Buchs Ende.

Das

Das Funffzehende Buch EUCLIDIS.

Die 1. Propoſition.

In einen gegebenen Cubo ABCDEFGH, ein Tetraedrum AGEC einzuſchreiben.

Operatio.

Von Winckel A ziehe die diagonal Linien AC, AE, AG, ſo dann auch CG, GE und EC.

Beweiß.

Dieſe 6 gezogene diagonal Linien ſeynd gleich groß/ folglich auch die 4 Triangel ACG, AGE, AEC und CGE. gleichſeitig und gleich groß, welche [13.13.] das Tedraedrum AGEC formiren, und [31 def. 11.] in dem Cubo richtig eingeſchrieben worden.

Die 2. Propoſition.

In ein gegebenes Tetraedrum ABCD ein Octaedrum HEFGIK einzuſchreiben.

Operatio.

Man zertheile jede Seite des Tetraedri [10.1.] halb, in E, F, G, H, I und K, ziehe dann ſolche Puncta mit Linien EI, IH, HE &c. zuſammen, ſo wird das Octaedrum HEFGIK in das Tetraedrum behörig eingeſchrieben ſeyn.

Beweiß.

Alle gezogene Linien EI, IH, &c. ſeynd [4.12.] folg-

folglich auch ſämtliche 8 Triangel GHI, IHE &c. einander gleich, welche [14. 13] das Octaedrum HEFGIK formiren, und alſo [31 def. 11.] in das Tetraedrum richtig einſchreiben.

Die 3. Propoſition.

In einem gegebenen Cubo ABCDEFGH, ein Octaedrum IKLMNO einzuſchreiben.

Operatio.

Ziehe des Cubi 6 quadrat Flächen Mittel-Puncta I, K, L, M, N, O, mit geraden Linien zuſammen.

Beweiß.

Die gezogenen Linien IO, IN, IL, IK, MN, MO, MK und ML ſeynd [35. 11.] einander gleich, und formiren auch gleiche Winckel und Triangel, wodurch denn [31 def. 11] das Octaedrum IKLMNO in dem Cubo richtig eingeſchrieben worden.

Die 4. Propoſition.

In ein gegebenes Octaedrum ABCDEF, einen Cubum GHIKLMNO einzuſchreiben.

Operatio.

Ziehe des Octaedri 8 Triangel Mittel-Puncta G, H, I, K, L, M, N, O, mit geraden Linien zuſammen, ſo iſt es verrichtet.

Beweiß.

Gleich wie des Octaedri Flächen Mittel-Puncta G, H, I, K &c. von Centro der Kugel, gleich weit abſtehen, alſo auch die Ecken des daraus entſtandenen Cubi. Und wie das Octaedrum in 8 Flächen

Flächen und 6 Ecken beſtehet, alſo bekomt in Gegentheil der Cubus dafür 6 Flächen und 8 Ecken von gleichen Linien und Flächen. Wodurch dann [31 def. 11.] der Cubus in das Octaedrum richtig eingeſchrieben worden.

Die 5. Propoſition.

In ein gegeben Icoſaedrum, ein Dodecaedrum einzuſchreiben.

Operatio.

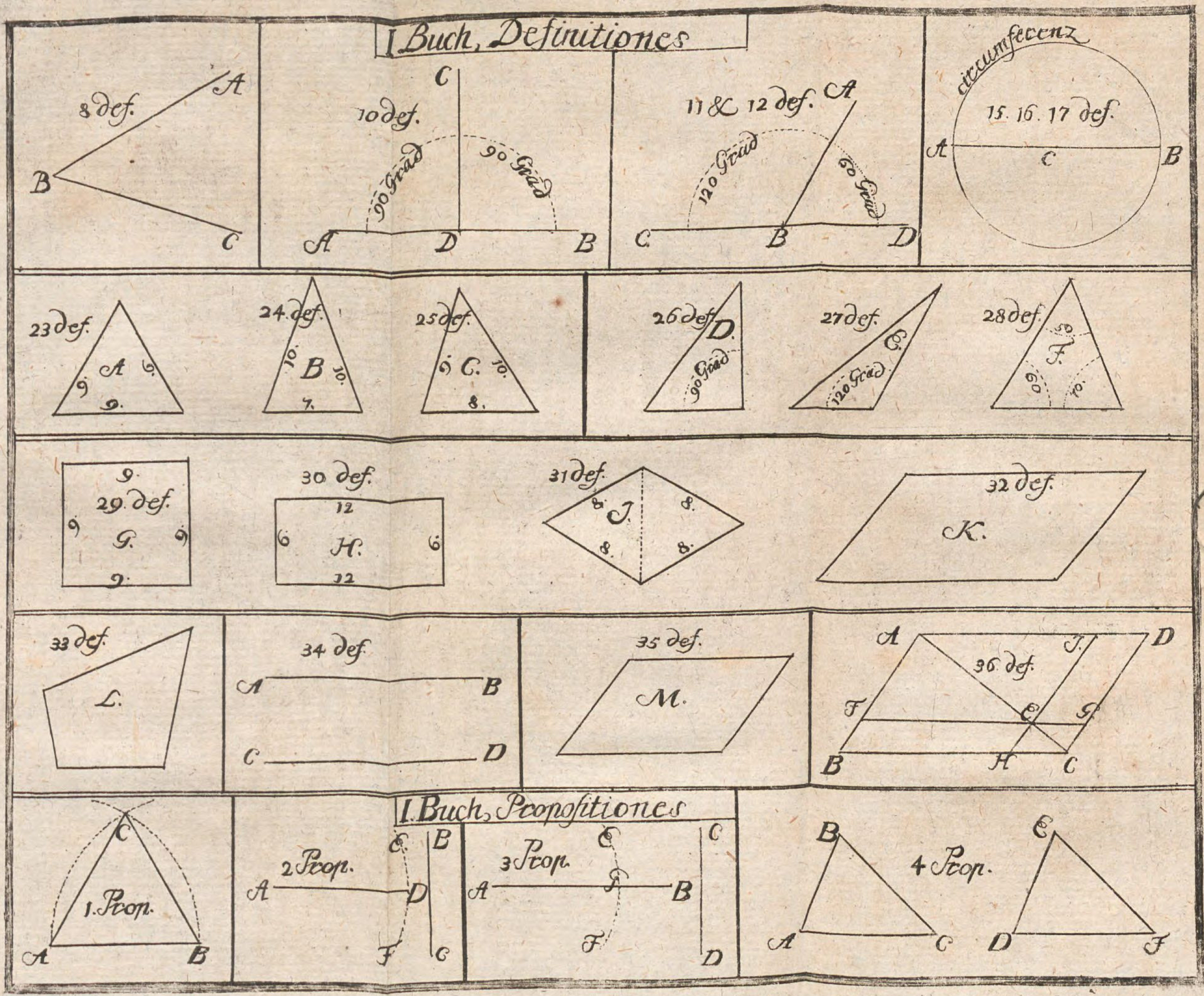
Man formire die Figur wie zuſehen. Ferner der Pyramis BAGHIK ihrer 5 Triangel ABG, BGH. &c. 5 Mittel-Puncta C, D, E, F, L, mit geraden Linien zuſammen gezogen. So wird CDEFL ein 5 Eck des eingeſchriebenen Dodecaedri ſeyn.

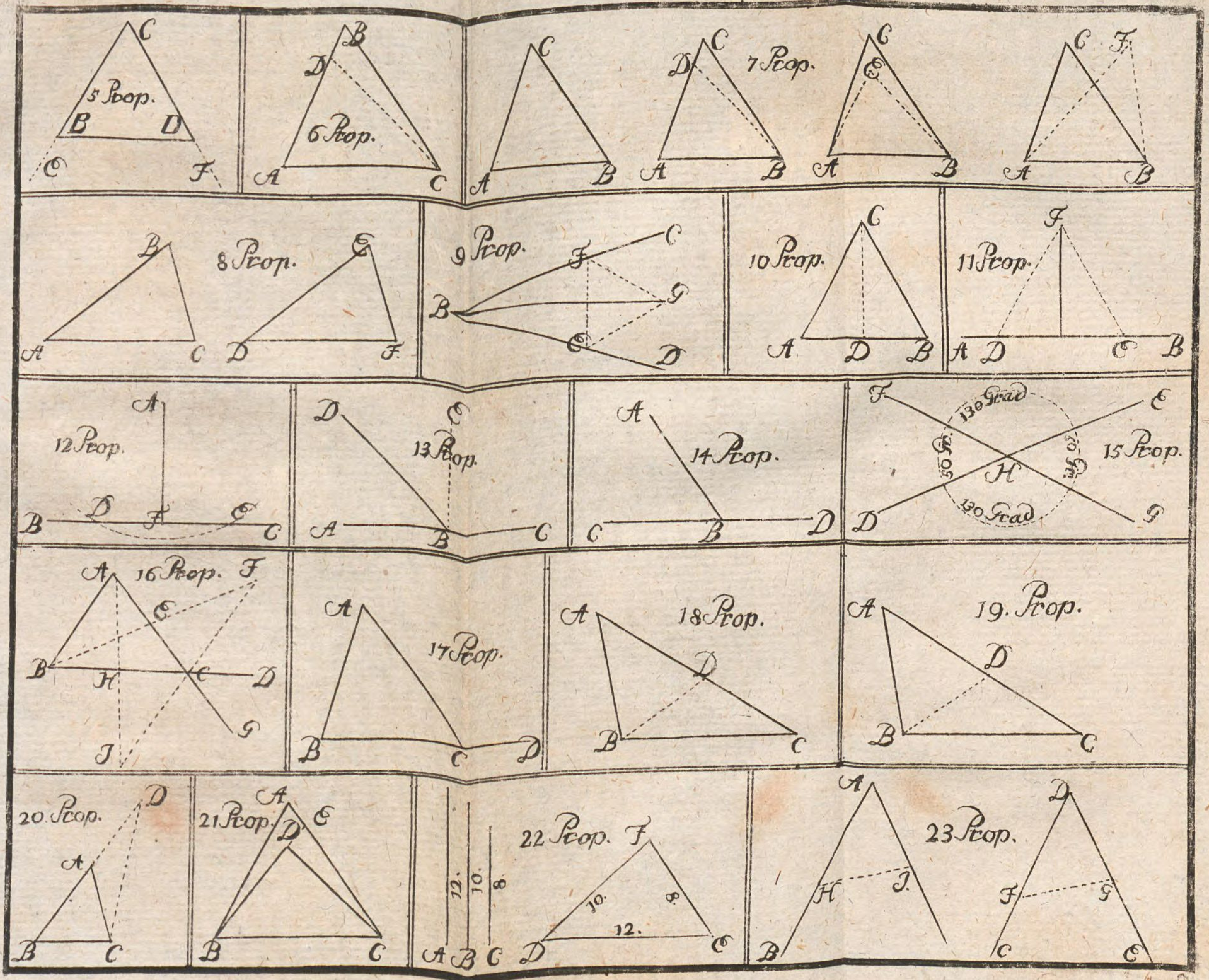
Beweiß.

Ein Icoſaedrum beſtehet in 20 Flächen und 12 Ecken: Alſo in Gegentheil ein Dodecaedrum in 12 Flächen und 20 Ecken.

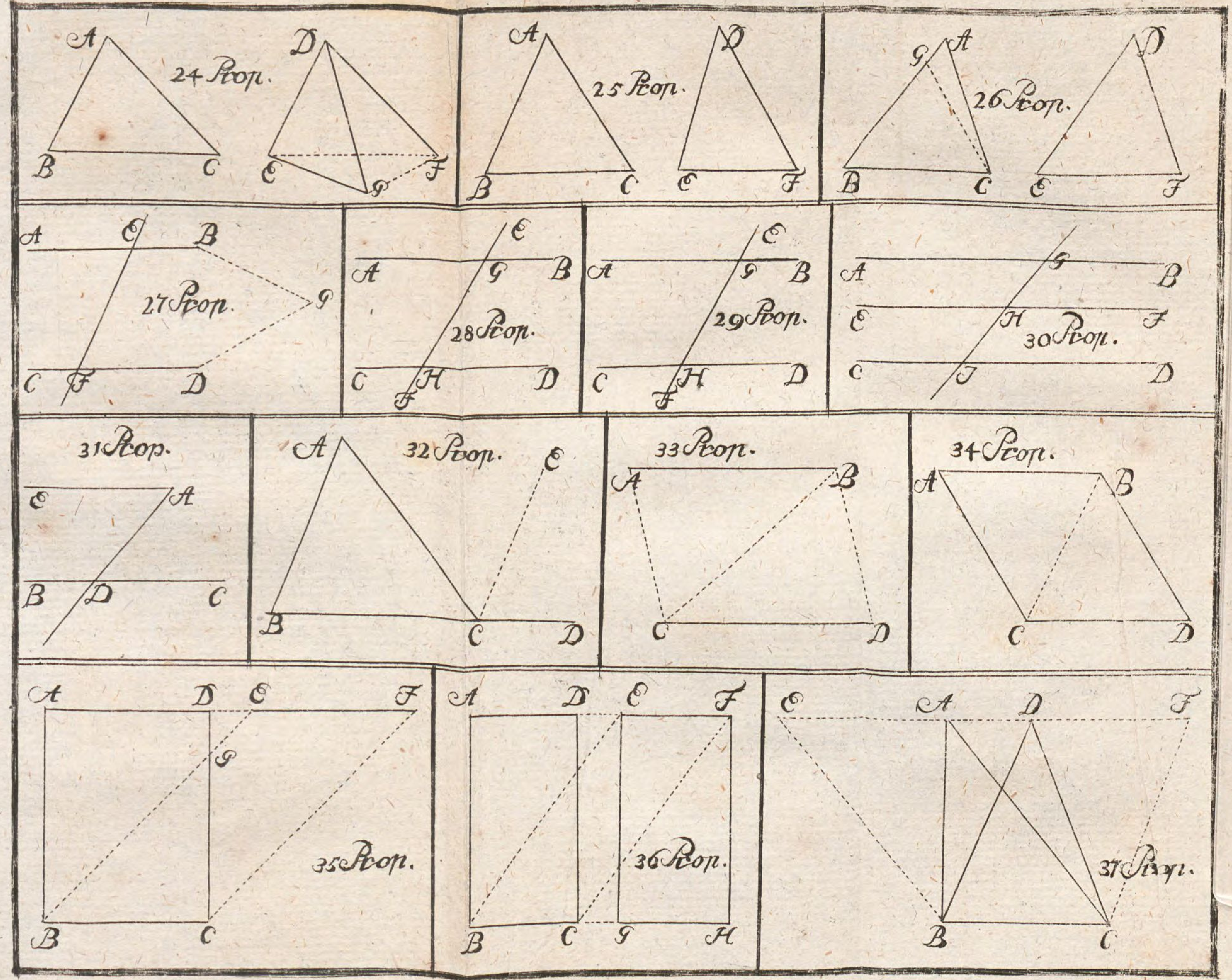
Da nun des Icoſaedri Flächen Mittel-Puncta CDEFL, als auch der übrigen Flächen Mittel-Puncta, von der Kugel Centro M gleich weit abſtehen. Alſo werden ebener maßen des Dodecaedri 5 Ecks CDEFL Ecken, als auch der übrigen Flächen Ecken, von Centro M gleich weit abſtehen. Folglich hierdurch [31 def. 11.] das Dodecaedrum in das Icoſaedrum richtig eingeſchrieben ſeyn.

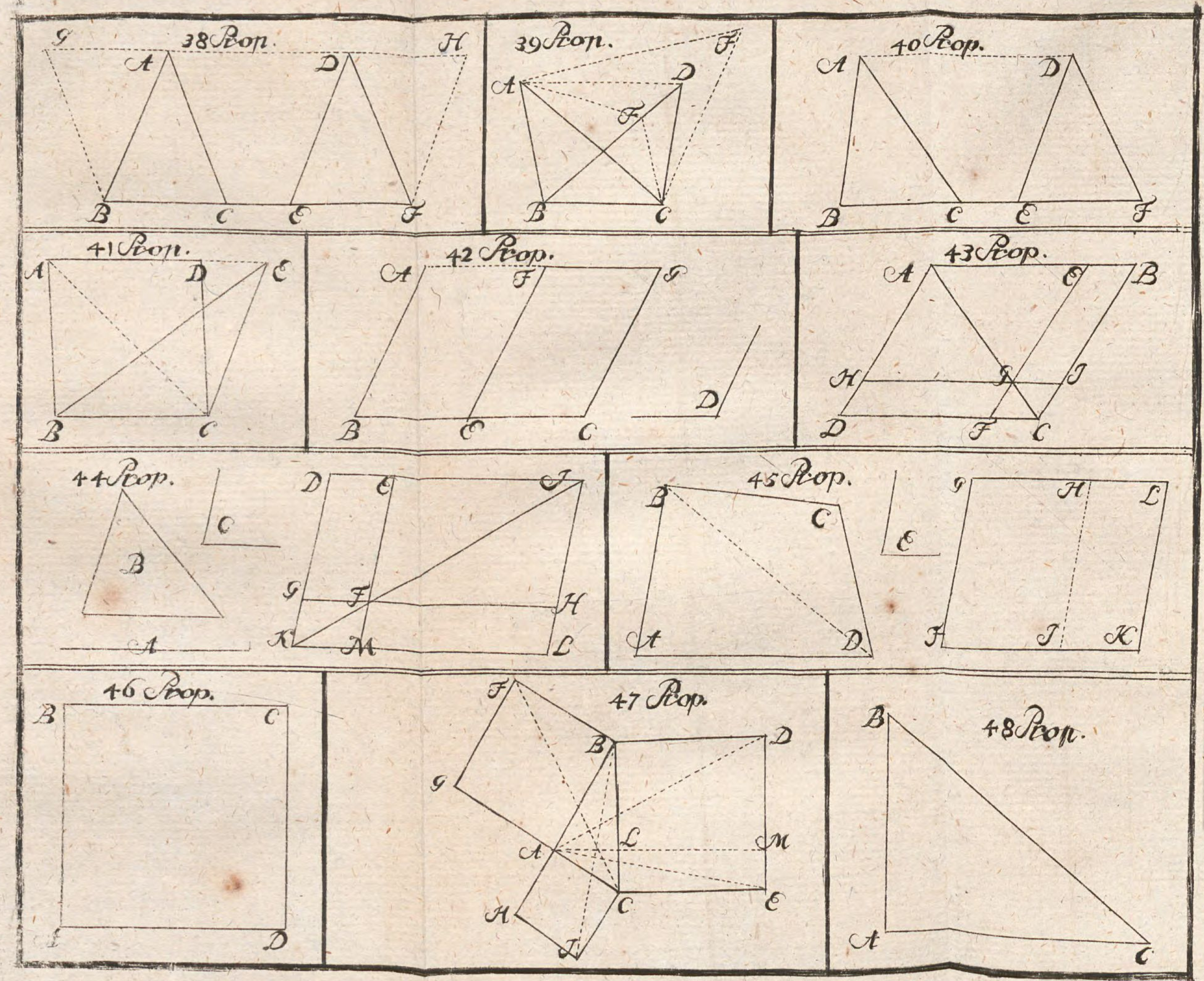
Des funffzehenden Buchs ENDE.


I. Buch, Definitiones
8 def.
A
B
C
10 def.
C
90 Grad
90 Grad
A
D
B
11 & 12 def.
A
120 Grad
60 Grad
C
B
D
circumferenz
15. 16. 17 def.
A
C
B
23 def.
A
24. def.
B
25 def.
C.
26 def.
D.
90 Grad
27 def.
E.
120 Grad
28 def.
F.
29. def.
G.
30 def.
H.
31 def.
J.
32 def.
K.
33 def.
L.
34 def.
A
B
C
D
35 def.
M.
36. def.
A
D
J.
F
E
G
B
H
C
I. Buch, Propositiones
C
1. Prop.
A
B
2 Prop.
E
B
A
D
F
G
3 Prop.
E
C
A
B
F
D
4 Prop.
B
A
C
E
D
F

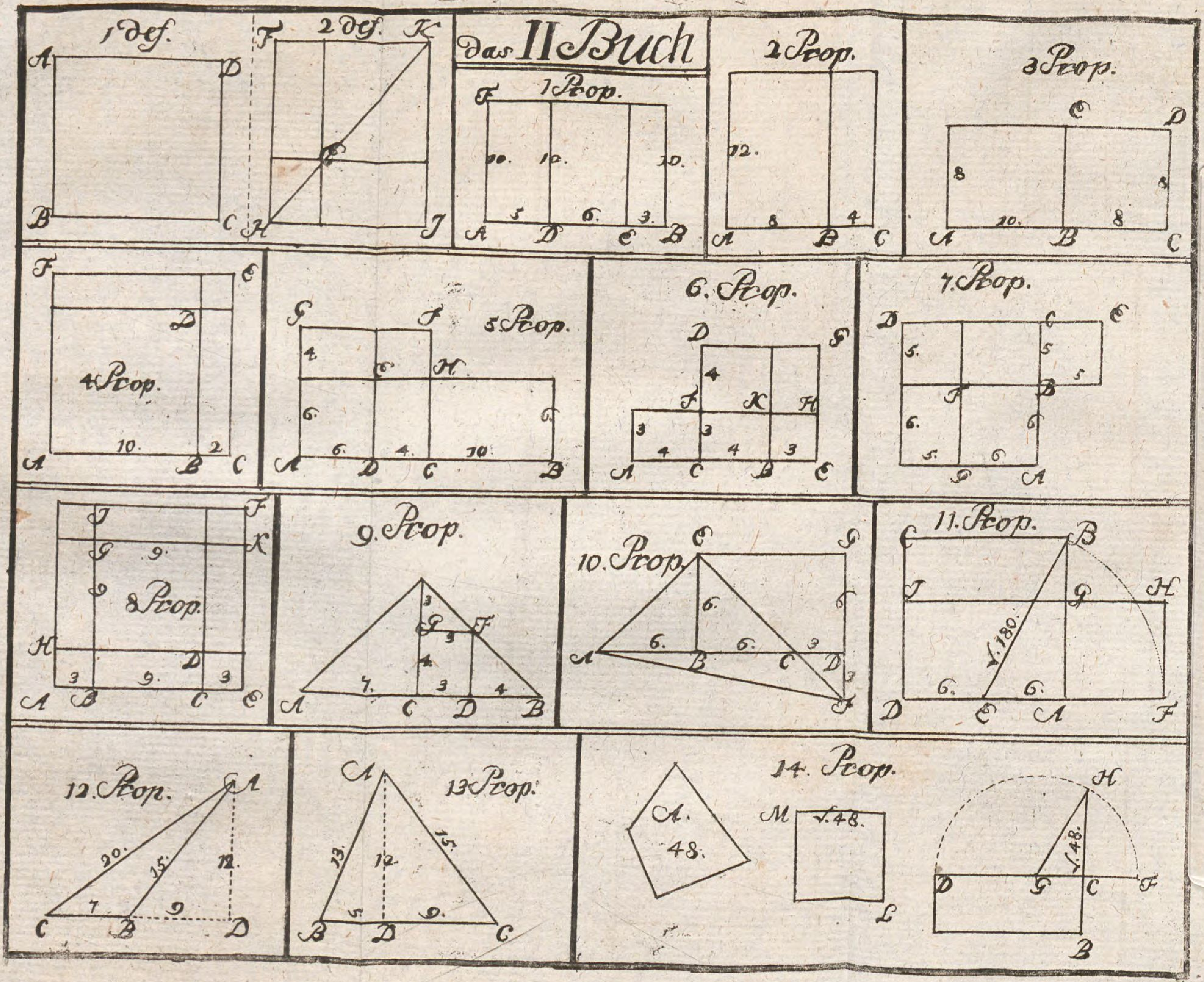


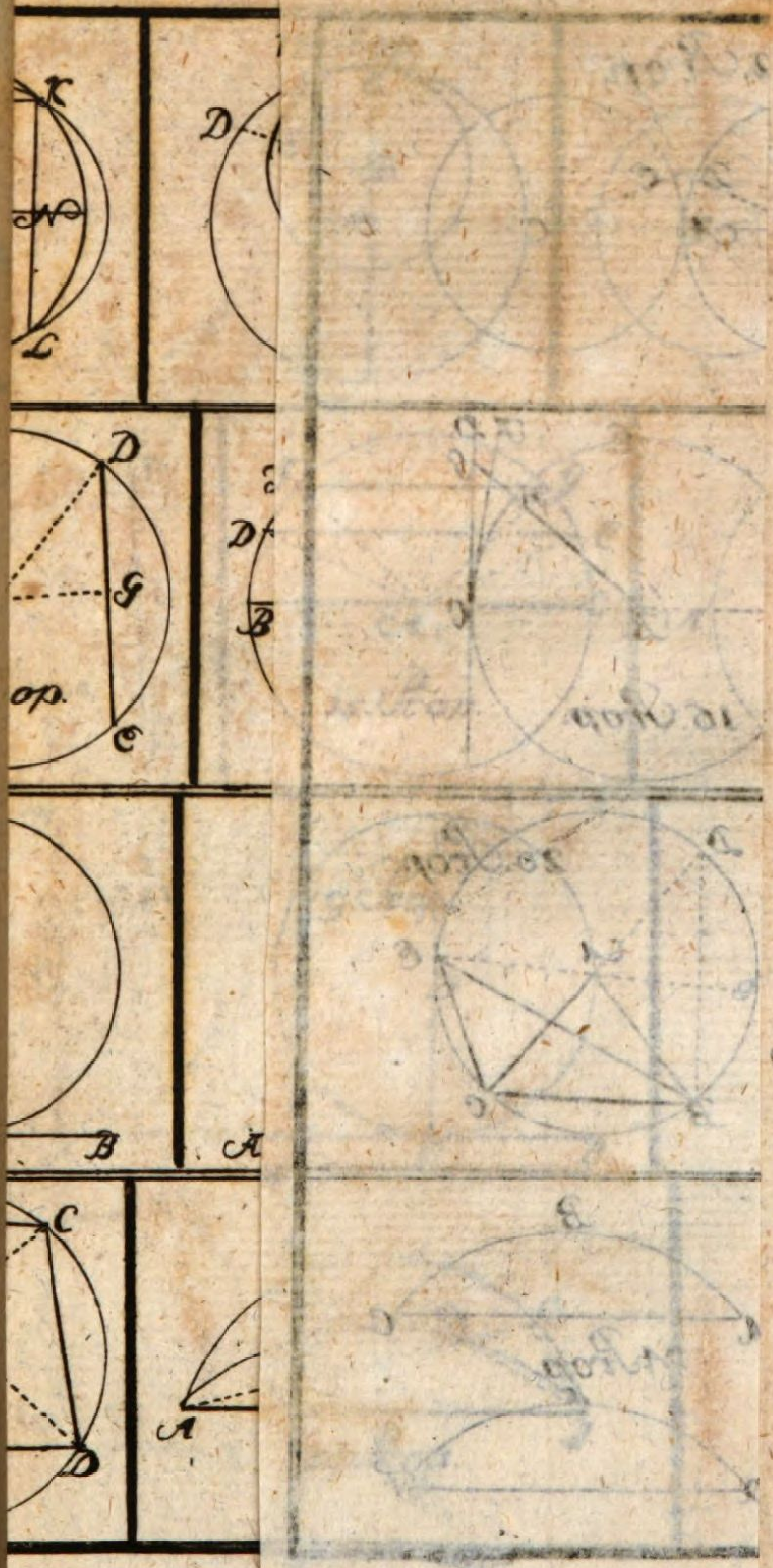
5 Prop.
C
B
D
E
F
6 Prop.
B
D
A
C
A
B
C
7 Prop.
D
C
A
B
C
E
A
B
C
F
A
B
8 Prop.
B
A
C
E
D
F
9 Prop.
C
F
G
B
E
D
10 Prop.
C
A
D
B
11 Prop.
F
A
D
E
B
12 Prop.
A
B
D
F
E
C
D
E
13 Prop.
A
B
C
A
14 Prop.
C
B
D
F
E
130 Grad
50 Gr.
50 Gr.
H
130 Grad
15 Prop.
D
G
A
16 Prop.
F
E
B
H
C
D
G
J
A
17 Prop.
B
C
D
A
18 Prop.
D
B
C
A
19. Prop.
D
B
C
20. Prop.
D
A
B
C
21 Prop.
A
E
D
B
C
12.
10.
8
A
B
C
22 Prop.
F
10.
8.
12.
D
E
A
H
J
B
23 Prop.
D
F
G
C
E

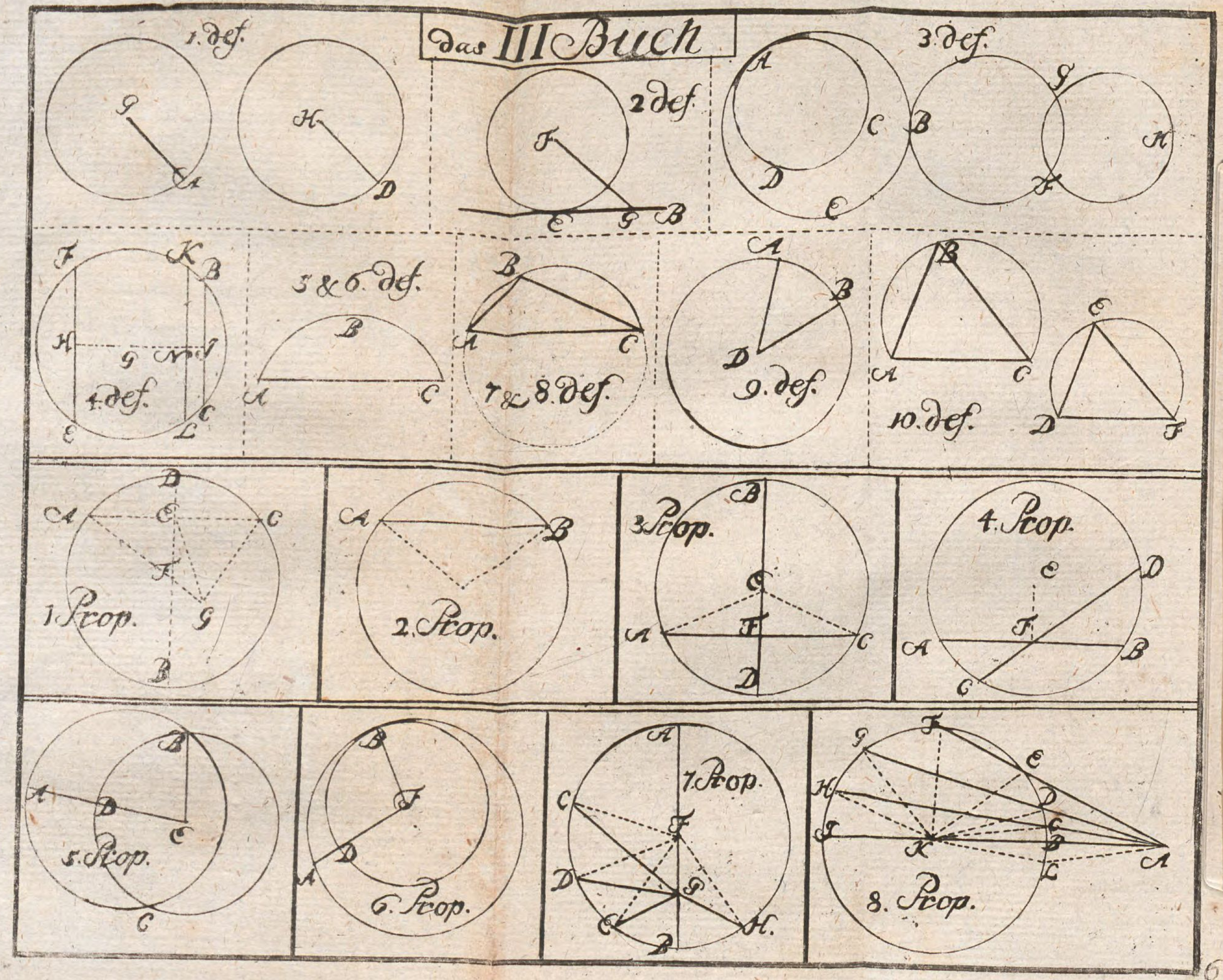

A D 24 Prop. B C E G F
A D 25 Prop. B C E F
G A D 26 Prop. B C E F
A C B 27 Prop. G C F D
E A G B 28 Prop. C H F D
E A G B 29 Prop. C H F D
G A B E H F 30 Prop. C I D
31 Prop. E A B D C
A 32 Prop. E B C D
33 Prop. A B C D
34 Prop. A B C D
A D E F G 35 Prop. B C
A D E F 36 Prop. B C G H
E A D F 37 Prop. B C

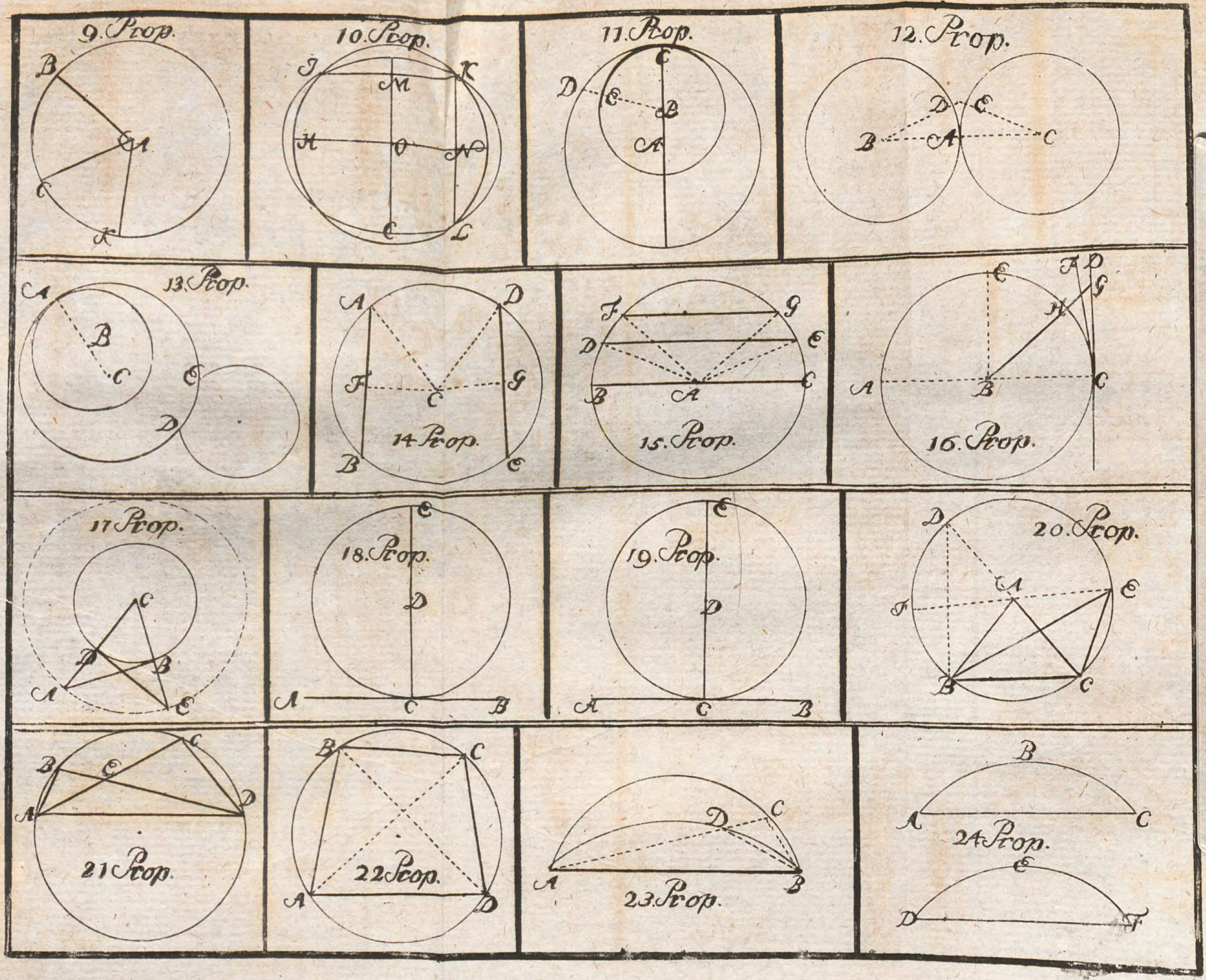

38 Prop.
G H A D B C E F
39 Prop.
F A D F B C
40 Prop.
A D B C E F
41 Prop.
A D E B C
42 Prop.
A F G B E C D
43 Prop.
A E B H G I D F C
44 Prop.
C B A D E I G F H K M L
45 Prop.
B C A D E G H L F I K
46 Prop.
B C D
47 Prop.
F B D G A L M C E H I
48 Prop.
B A C

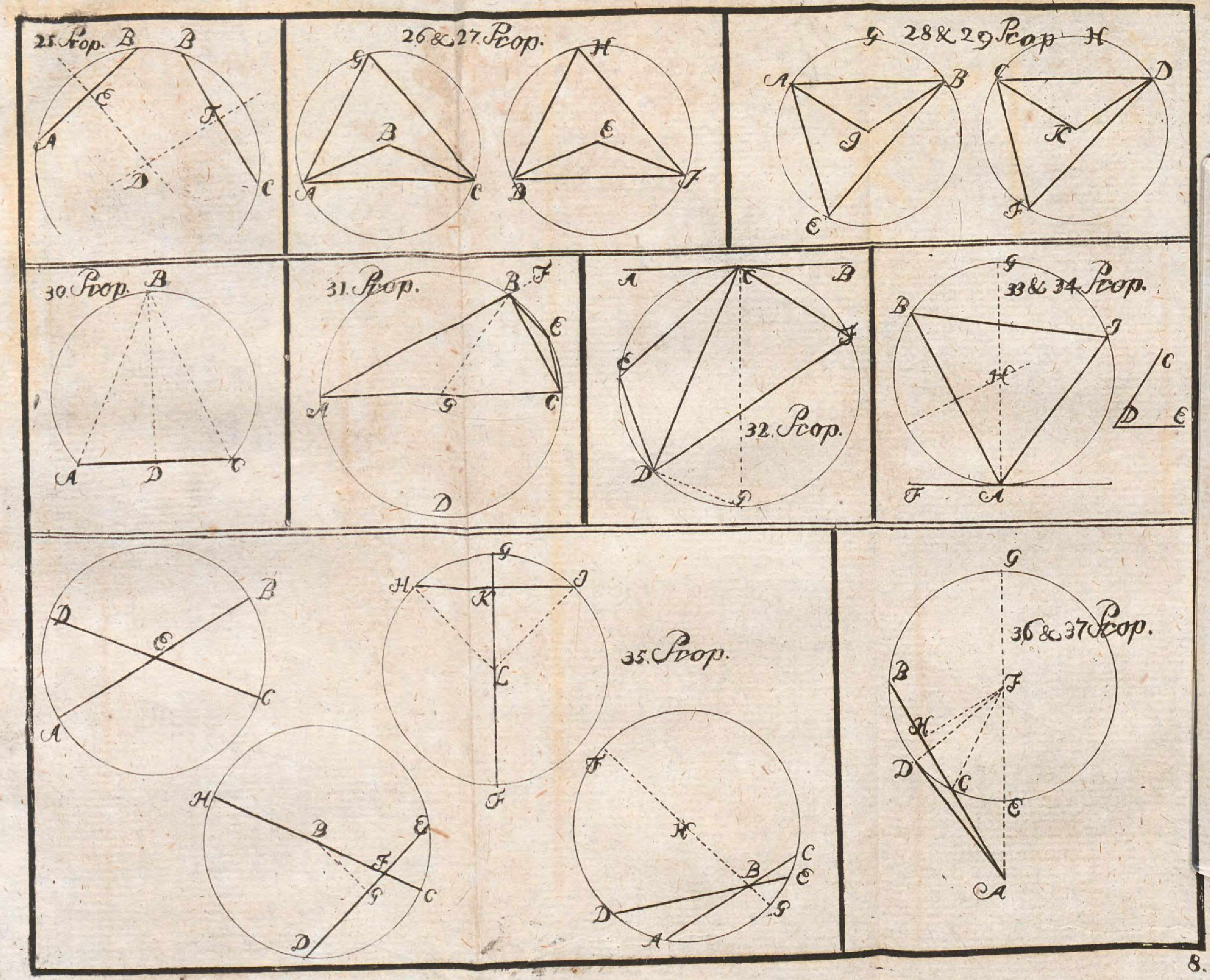
4


Das II Buch
1 def.
2 def.
1 Prop.
2 Prop.
3 Prop.
4 Prop.
5 Prop.
6. Prop.
7. Prop.
8 Prop.
9. Prop.
10. Prop.
11. Prop.
12. Prop.
13 Prop.
14. Prop.

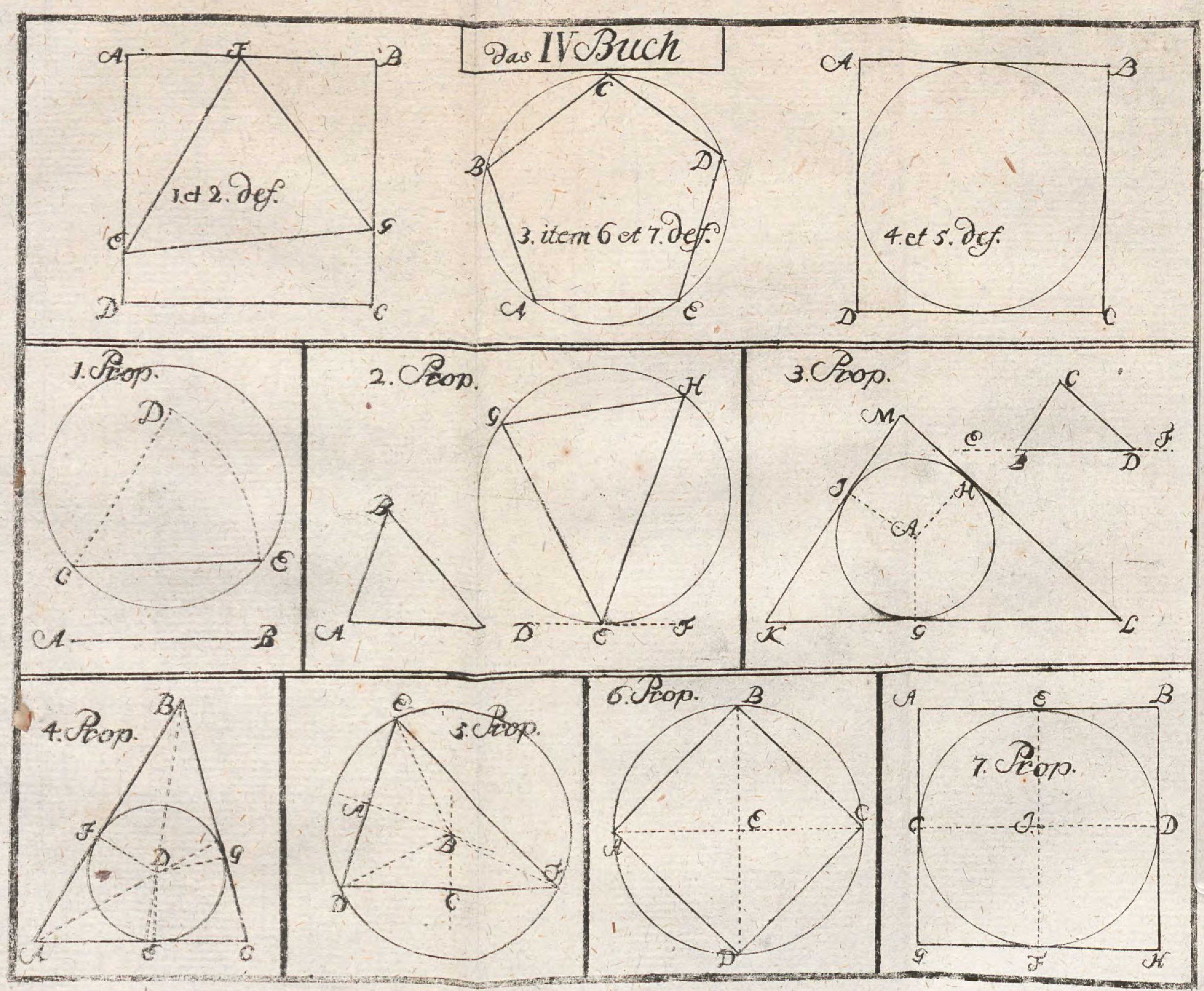

K
N
L
D
D
G
op.
C
D
B
B
A
C
A
D

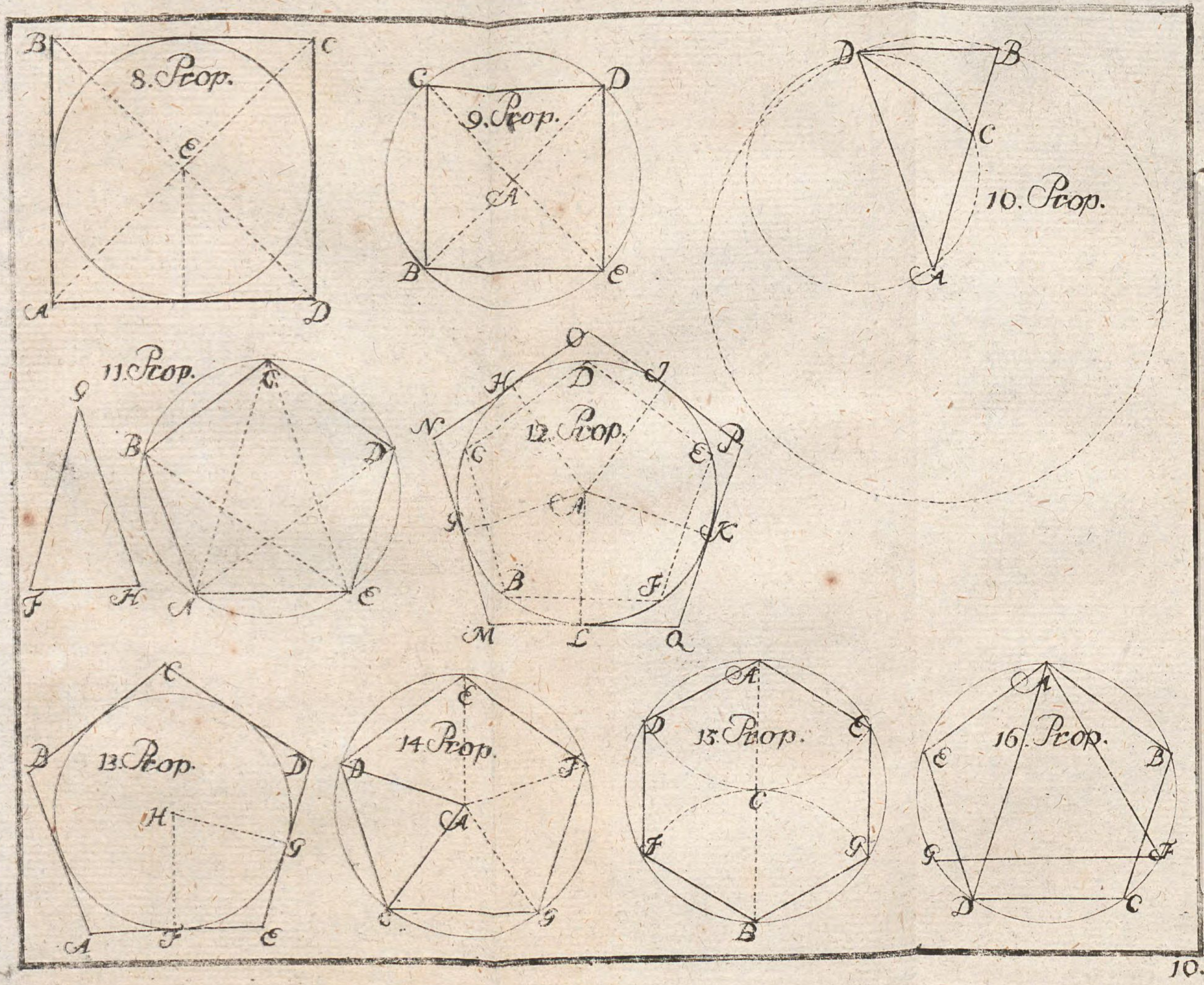

das III Buch
1. def.
2 def.
3. def.
4. def.
5 & 6. def.
7 & 8. def.
9. def.
10. def.
1 Prop.
2. Prop.
3 Prop.
4. Prop.
5. Prop.
6. Prop.
7 Prop.
8. Prop.

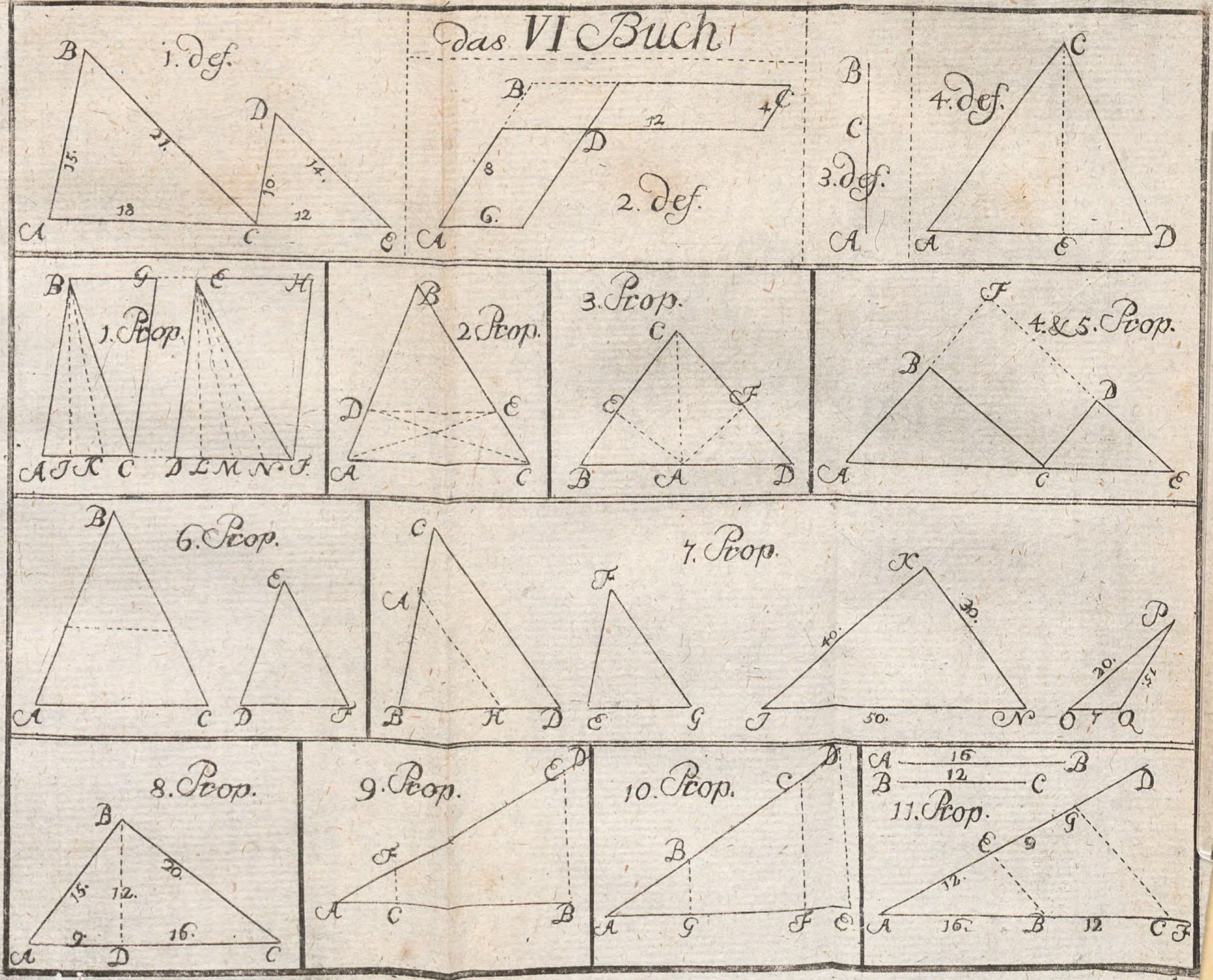

9. Prop.
10. Prop.
11. Prop.
12. Prop.
13. Prop.
14 Prop.
15. Prop.
16. Prop.
17 Prop.
18. Prop.
19. Prop.
20. Prop.
21 Prop.
22 Prop.
23. Prop.
24. Prop.

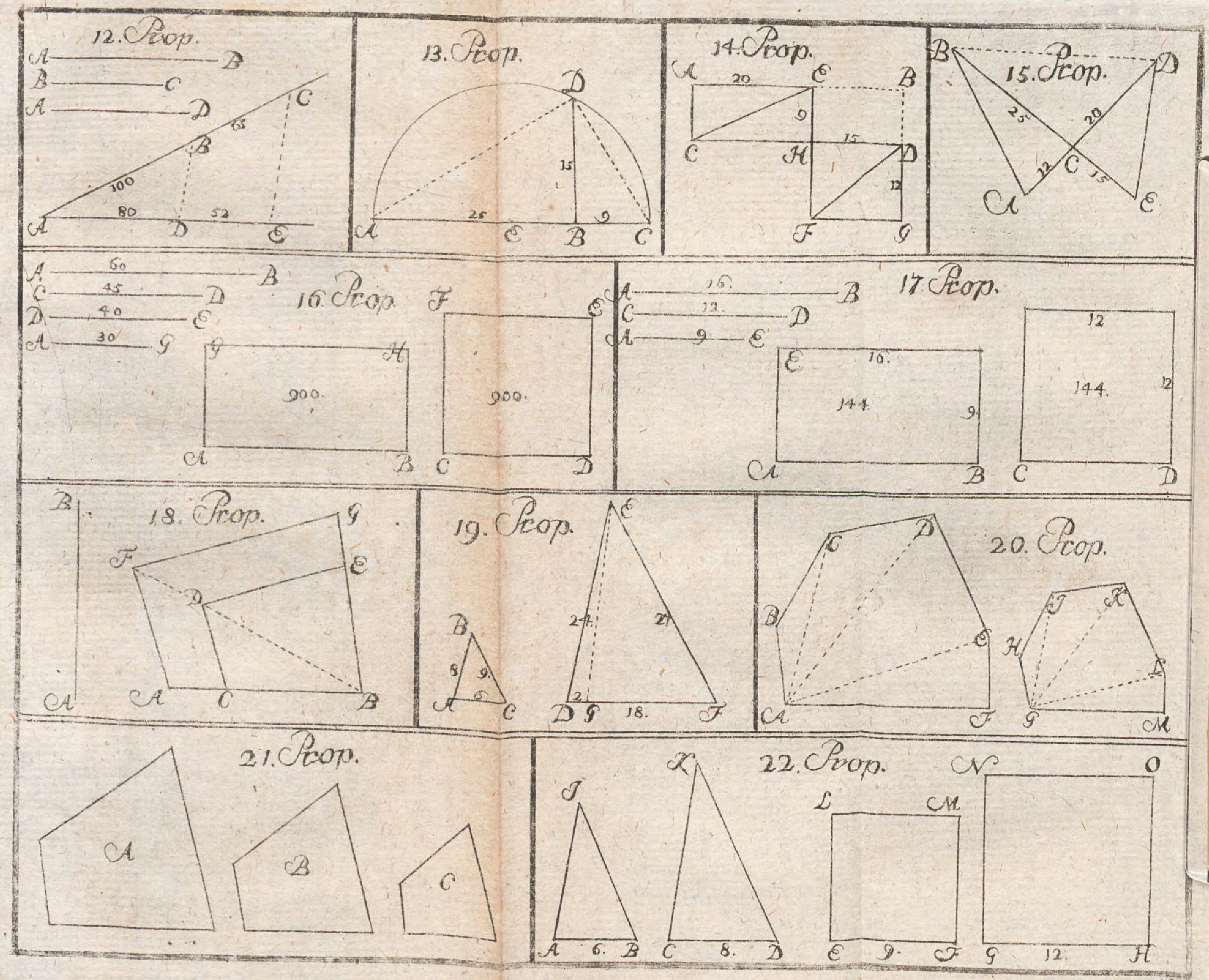


25. Prop.
26 & 27. Prop.
28 & 29. Prop.
30. Prop.
31. Prop.
32. Prop.
33 & 34. Prop.
35. Prop.
36 & 37. Prop.

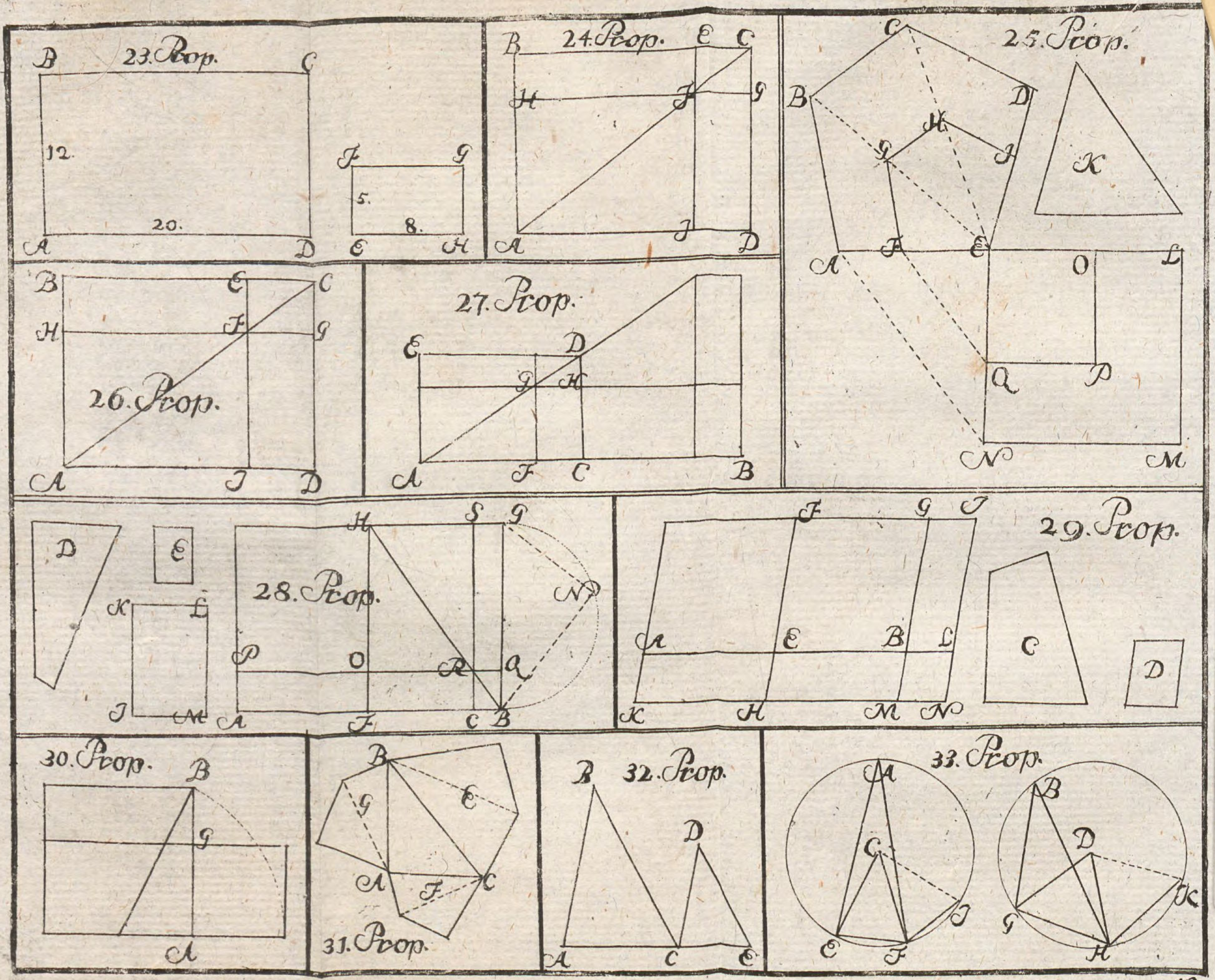

Das IV Buch
1. et 2. def.
3. item 6 et 7. def.
4. et 5. def.
1. Prop.
2. Prop.
3. Prop.
4. Prop.
5. Prop.
6. Prop.
7. Prop.

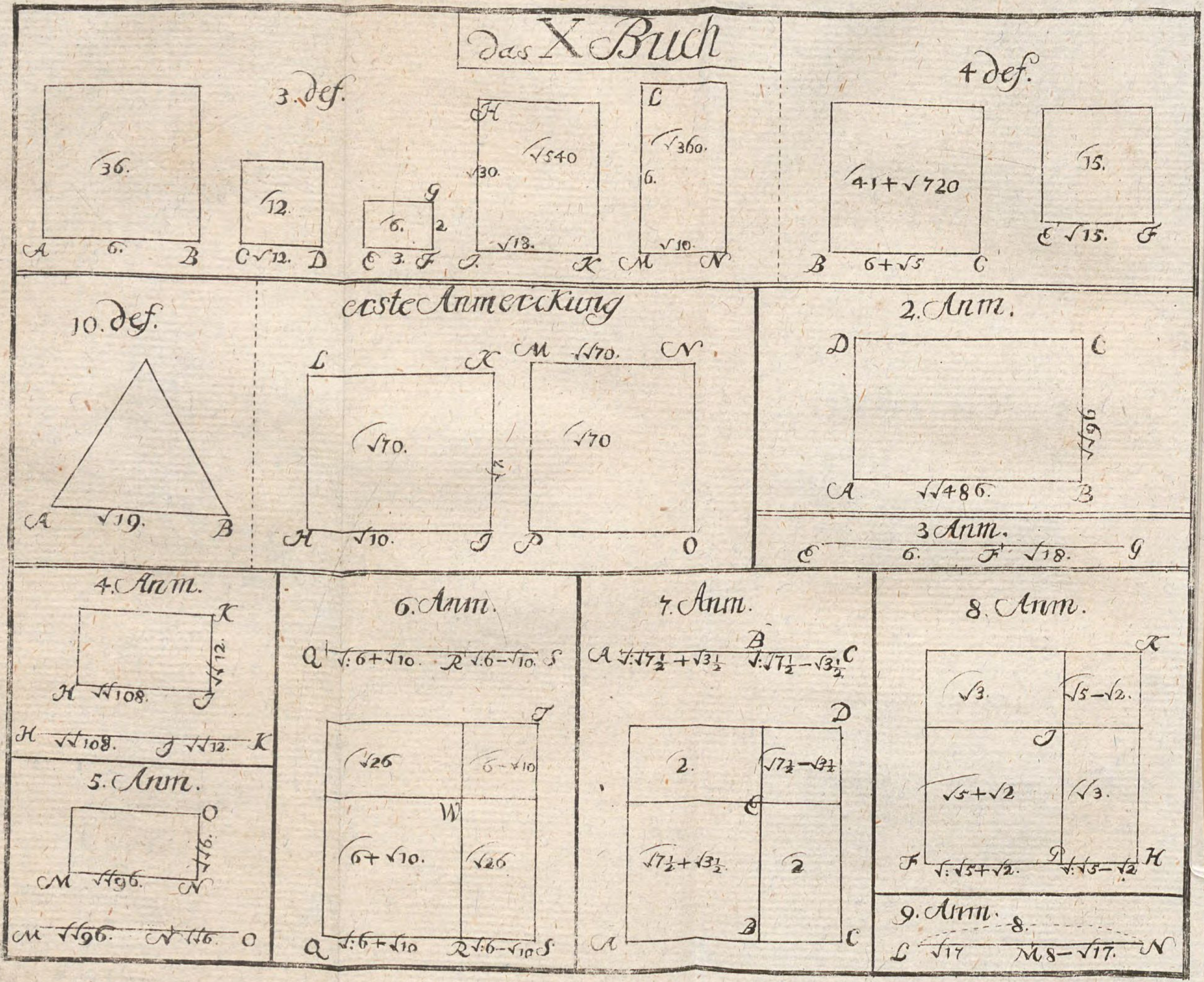

8. Prop.
9. Prop.
10. Prop.
11. Prop.
12. Prop.
13. Prop.
14 Prop.
15. Prop.
16. Prop.

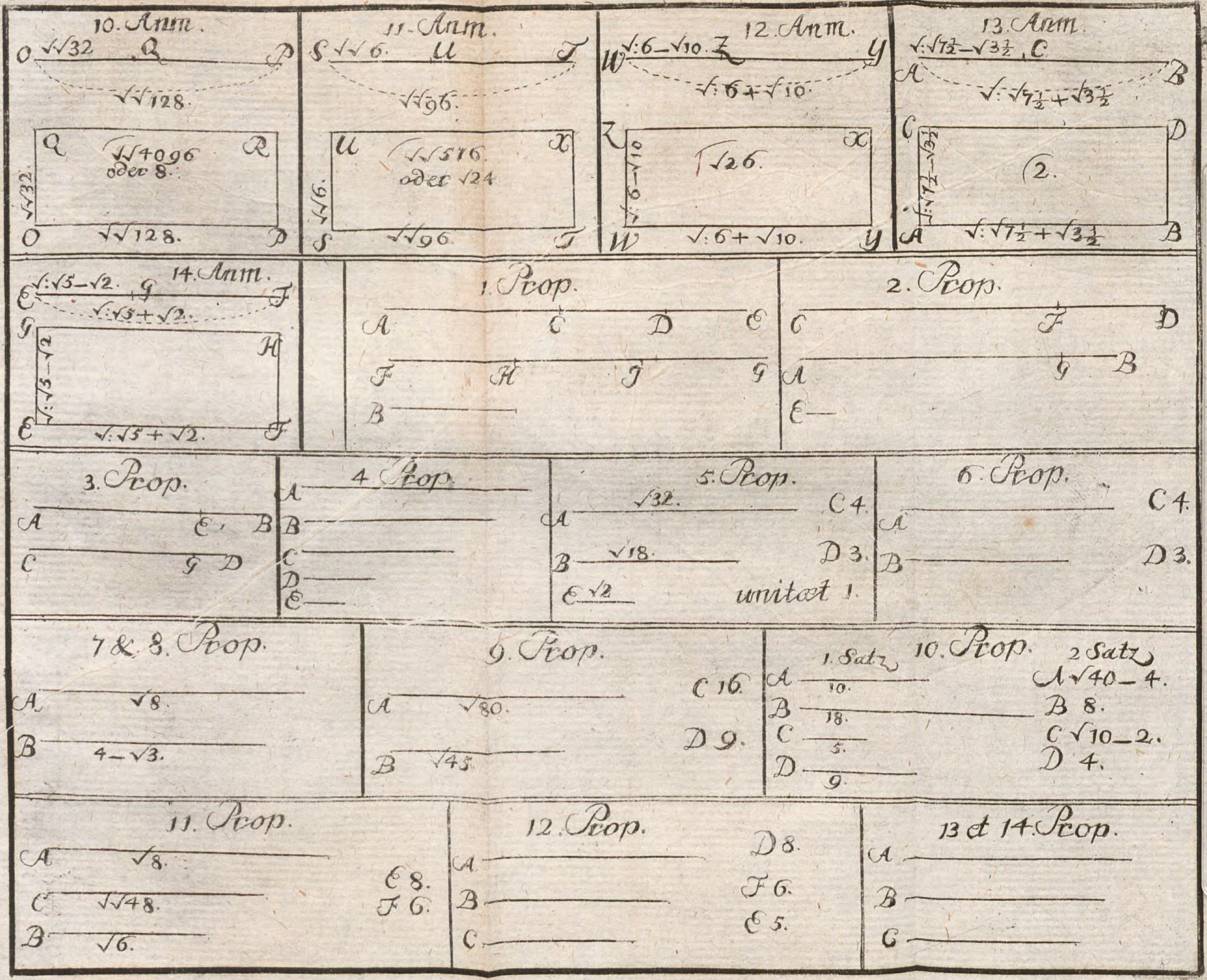

das VI Buch
1. def.
2. def.
3. def.
4. def.
1. Prop.
2 Prop.
3. Prop.
4. & 5. Prop.
6. Prop.
7. Prop.
8. Prop.
9. Prop.
10. Prop.
11. Prop.

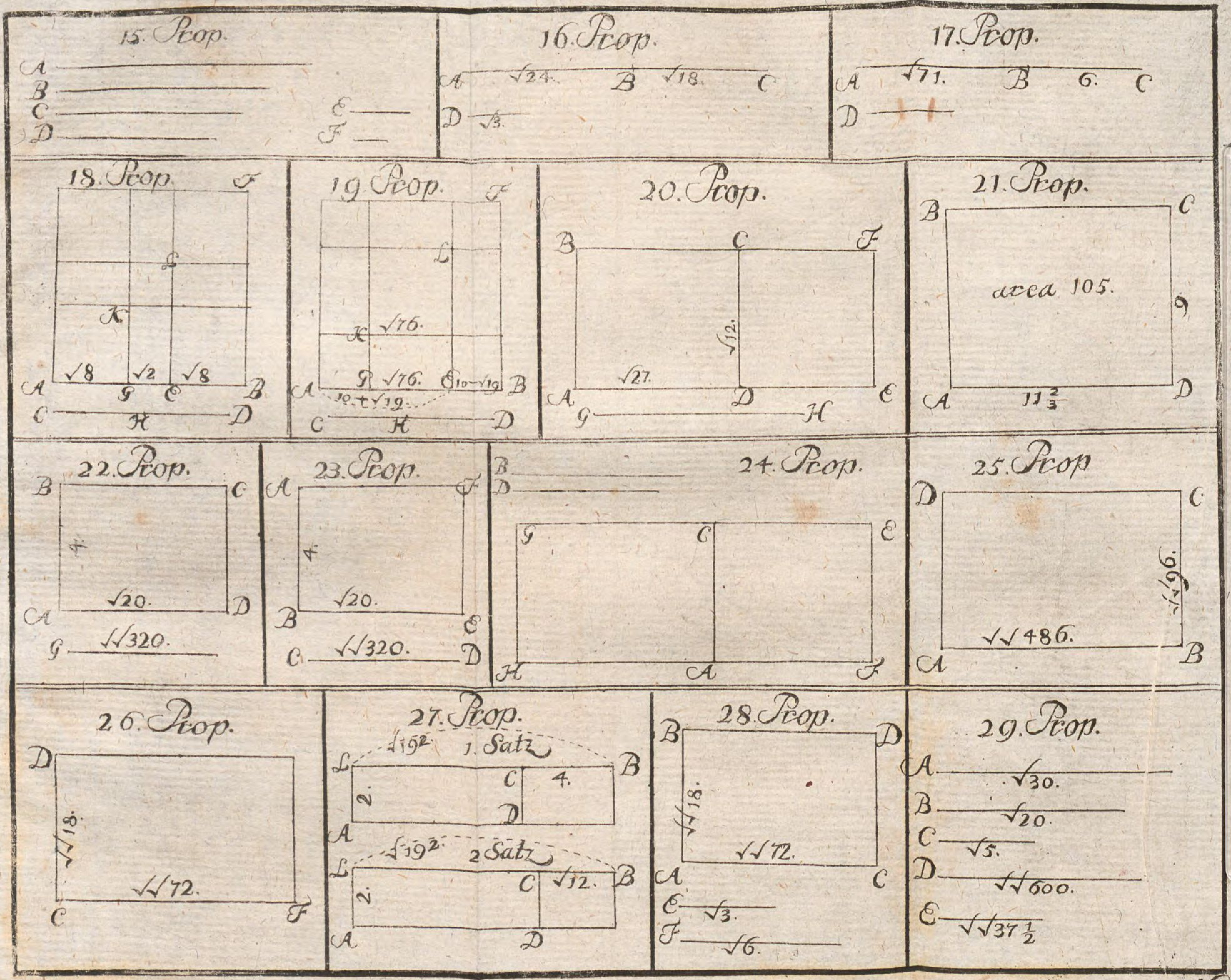

12. Prop.
13. Prop.
14. Prop.
15. Prop.
16. Prop.
17. Prop.
18. Prop.
19. Prop.
20. Prop.
21. Prop.
22. Prop.

12

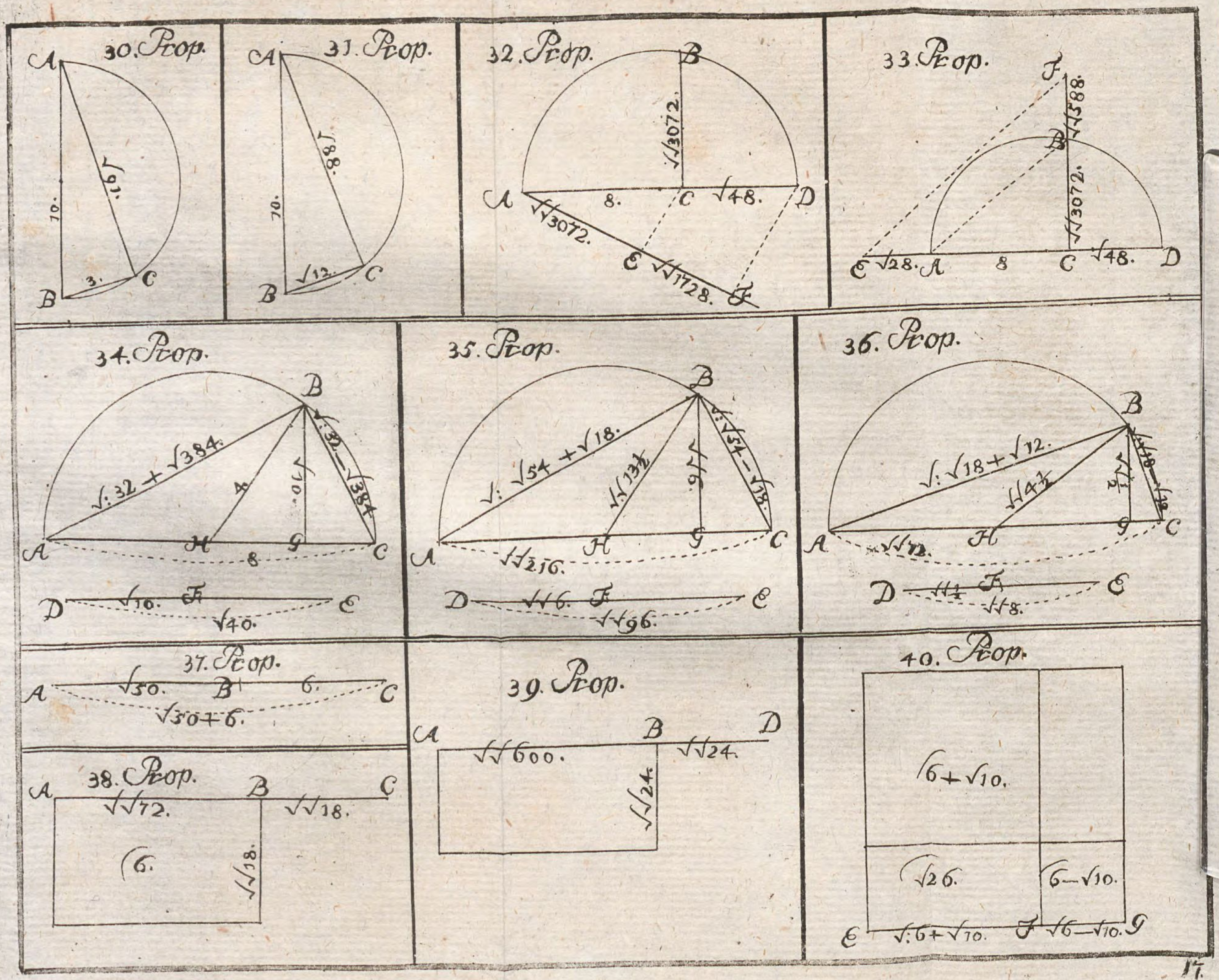

23. Prop.
12.
20.
5.
8.
24. Prop.
25. Prop.
26. Prop.
27. Prop.
28. Prop.
29. Prop.
30. Prop.
31. Prop.
32. Prop.
33. Prop.

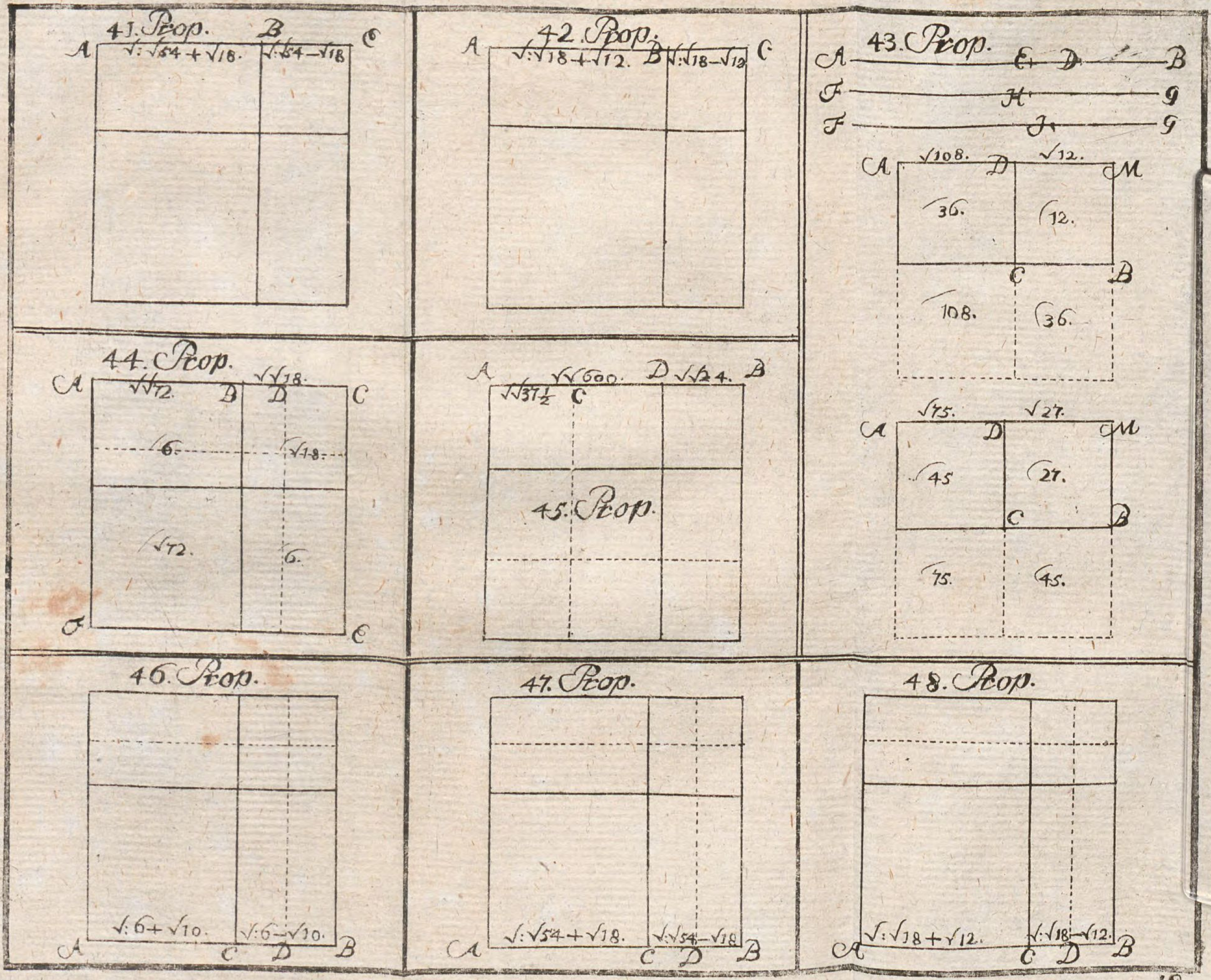

das X Buch
3. def.
36.
A 6. B
12.
C √12. D
6.
2
E 3. F G
H √540 √30.
I √18. K
L √360. 6.
M √10. N
4 def.
41 + √720
B 6 + √5 C
15.
E √15. F
10. def.
A √19. B
erste Anmerckung
L K √70.
H √10. I
M √√70. N
√70
P O
2. Anm.
D C
√√96
A √√486. B
3 Anm.
E 6. F √18. G
4. Anm.
K √√12.
H √√108. I
H √√108. I √√12. K
5. Anm.
O √√6.
M √√96. N
M √√96. N √√6. O
6. Anm.
Q √: 6 + √10. R √: 6 − √10. S
T
√26
6 − √10
W
6 + √10.
√26
Q √: 6 + √10 R √: 6 − √10 S
7. Anm.
A √: √7½ + √3½ B √: √7½ − √3½ C
D
2.
√7½ − √3½
E
√7½ + √3½
2
A B C
8. Anm.
K
√3.
√5 − √2.
I
√5 + √2
√3.
F √: √5 + √2. G √: √5 − √2. H
9. Anm.
8.
L √17 M 8 − √17. N


10. Anm.
O √√32 Q P
√√128.
Q √√4096 oder 8. R
√√32.
O √√128. P
11. Anm.
S √√6. U T
√√96.
U √√576. oder √24 X
√√6.
S √√96 T
12. Anm.
W √:6 – √10. Z Y
√:6 + √10.
Z √26. X
√:6 – √10
W √:6 + √10. Y
13. Anm.
√:√7½ – √3½. C
A B
√:√7½ + √3½
C (2. D
√:√7½ – √3½
A √:√7½ + √3½ B
14. Anm.
E √:√5 – √2. G F
√:√5 + √2.
G H
√:√5 – √2
E √:√5 + √2. F
1. Prop.
A C D E
F H J G
B
2. Prop.
C F D
A G B
E
3. Prop.
A E B
C G D
4. Prop.
A
B
C
D
E
5. Prop.
A √32. C 4.
B √18. D 3.
E √2 unitæt 1.
6. Prop.
A C 4.
B D 3.
7 & 8. Prop.
A √8.
B 4 – √3.
9. Prop.
A √80. C 16.
B √45 D 9.
1. Satz 10. Prop. 2 Satz
A 10. A √40 – 4.
B 18. B 8.
C 5. C √10 – 2.
D 9. D 4.
11. Prop.
A √8.
C √√48.
B √6.
E 8.
F 6.
12. Prop.
A D 8.
B F 6.
C E 5.
13 et 14. Prop.
A
B
C

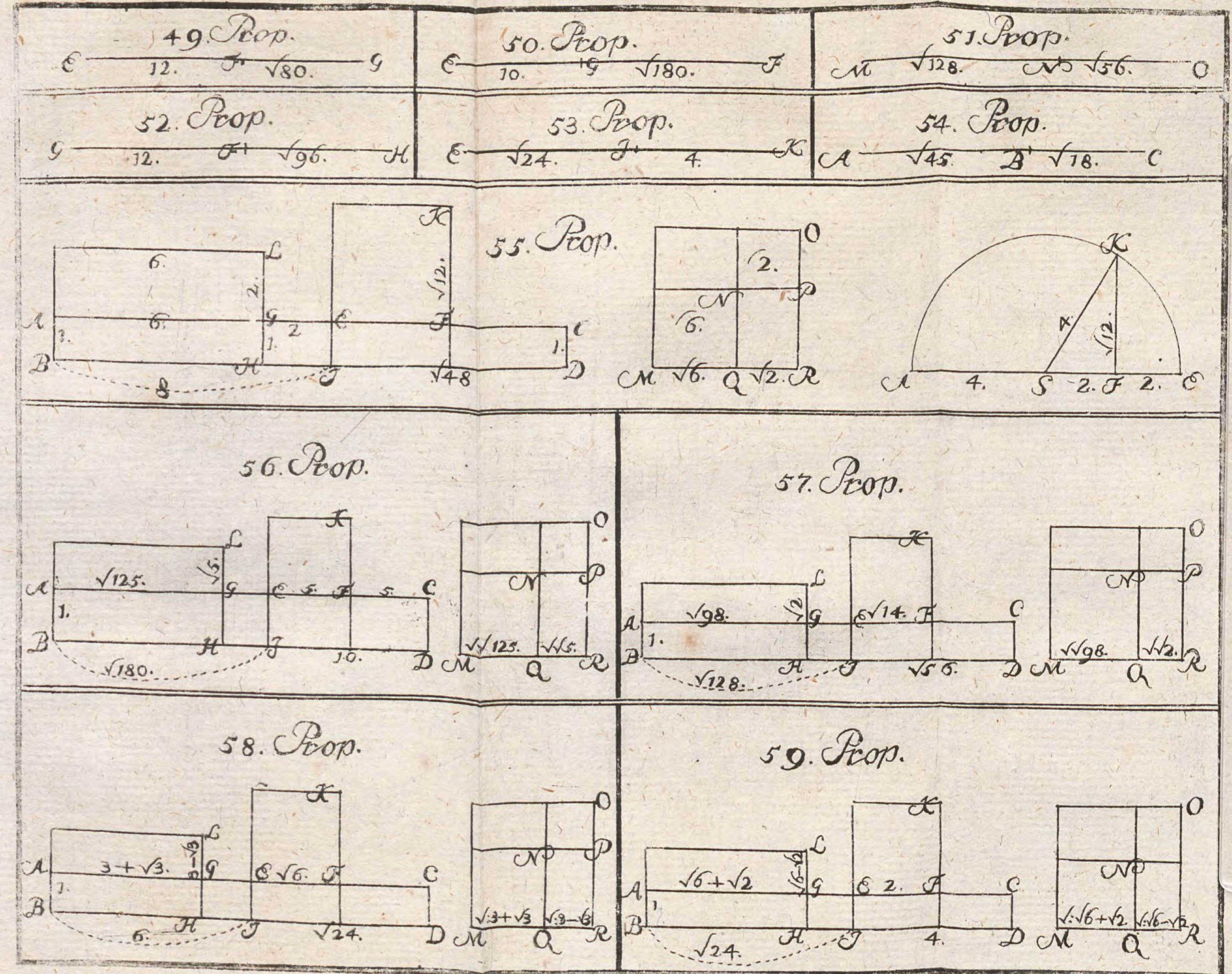

15. Prop.
16. Prop.
√24.
√18.
√3.
17. Prop.
√71.
6.
18. Prop.
√8
√2
√8
19 Prop.
√76.
√76.
10+√19.
10−√19
20. Prop.
√12.
√27.
21. Prop.
area 105.
9
$11\frac{2}{3}$
22. Prop.
4.
√20.
√√320.
23. Prop.
4.
√20.
√√320.
24. Prop.
25. Prop
√√96.
√√486.
26. Prop.
√√18.
√√72.
27. Prop.
√192.
1. Satz
4.
2.
√192.
2 Satz
√12.
2.
28. Prop.
√√18.
√√72.
√3.
√6.
29. Prop.
√30.
√20.
√5.
√√600.
$\sqrt{}\sqrt{}37\frac{1}{2}$

16.

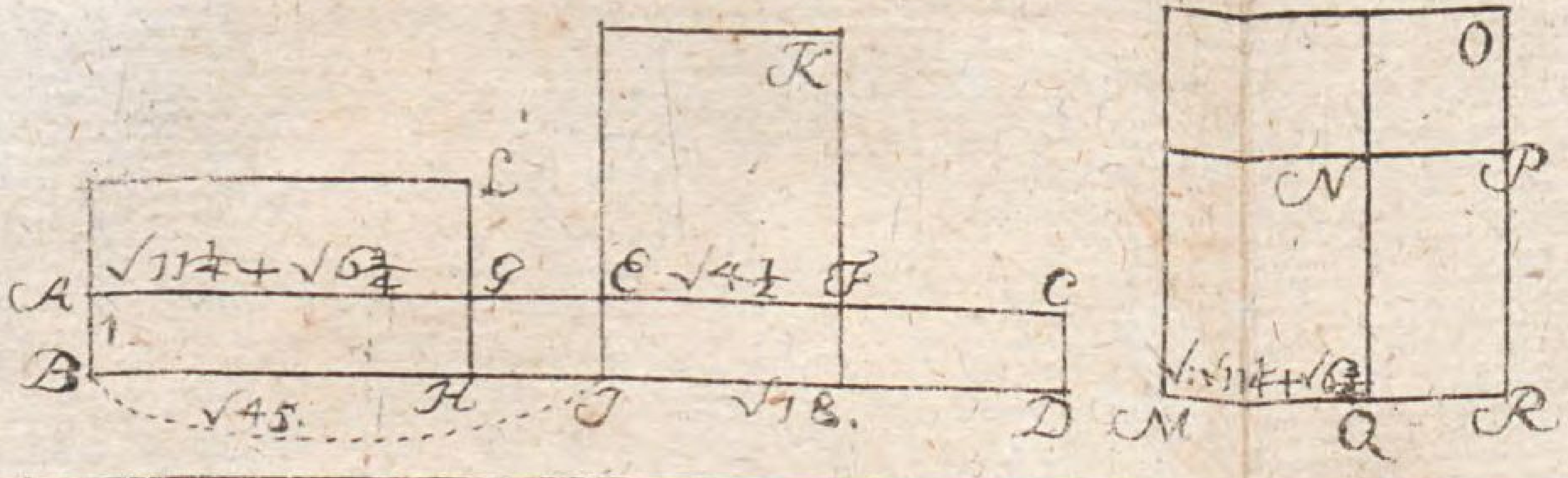

30. Prop.
A
B
C
10.
3.
√11.
31. Prop.
A
B
C
10.
√12.
√88.
32. Prop.
A
B
C
D
E
F
8.
√48.
√√3072.
√√1728.
33. Prop.
A
B
C
D
E
F
√28.
8
√48.
√√3072.
√√1588.
34. Prop.
A
B
C
D
E
F
G
H
√: 32 + √384.
√10.
8
√40.
35. Prop.
A
B
C
D
E
F
G
H
√: √54 + √18.
√√216.
√√6.
√√96.
36. Prop.
A
B
C
D
E
F
G
H
√: √18 + √12.
√√12.
√√8.
37. Prop.
A
B
C
√30.
6.
√30 + 6.
38. Prop.
A
B
C
√√72.
√√18.
√6.
39. Prop.
A
B
D
√√600.
√√24.
40. Prop.
E
F
G
√6 + √10.
√26.
√6 — √10.
√: 6 + √10.



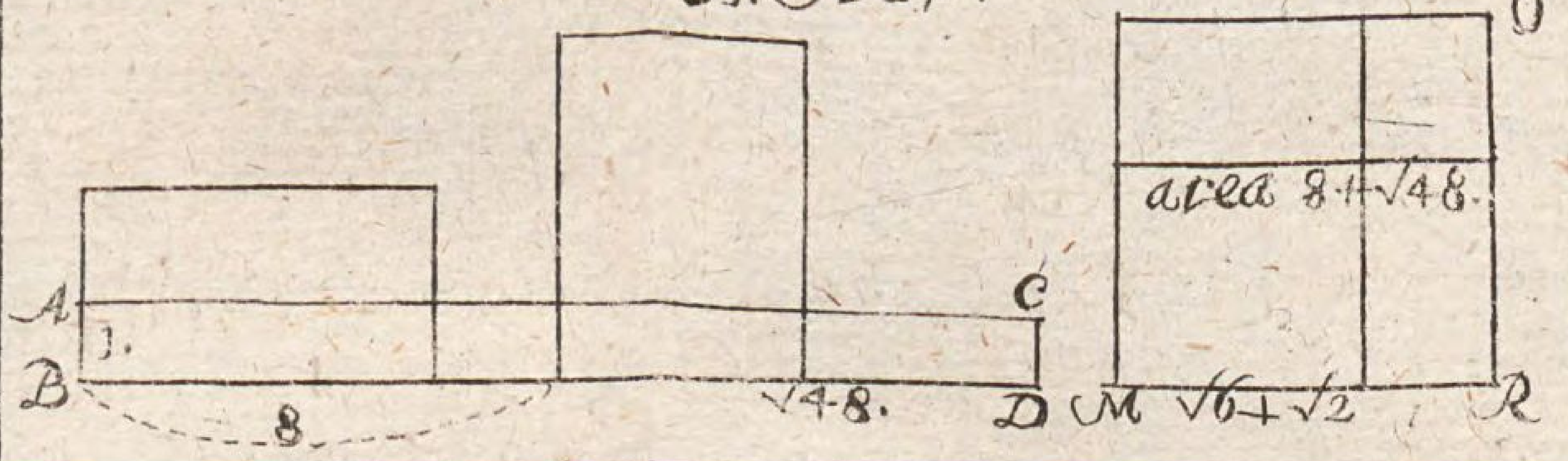
41. Prop.
√:√54+√18.
√:√54−√18
42. Prop.
√:√18+√12.
√:√18−√12
43. Prop.
√108.
√12.
36.
12.
108.
36.
√75.
√27.
45
27.
75.
45.
44. Prop.
√√72.
√√18.
6.
√18.
√72.
6.
√√600.
√√24.
√√37½
45. Prop.
46. Prop.
√:6+√10.
√:6−√10.
47. Prop.
√:√54+√18.
√:√54−√18
48. Prop.
√:√18+√12.
√:√18−√12.


49. Prop.
E 12. F √80. G
50. Prop.
E 10. G √180. F
51. Prop.
M √128. N √56. O
52. Prop.
G 12. F √96. H
53. Prop.
E √24. J 4. K
54. Prop.
A √45. B √18. C
55. Prop.
56. Prop.
57. Prop.
58. Prop.
59. Prop.

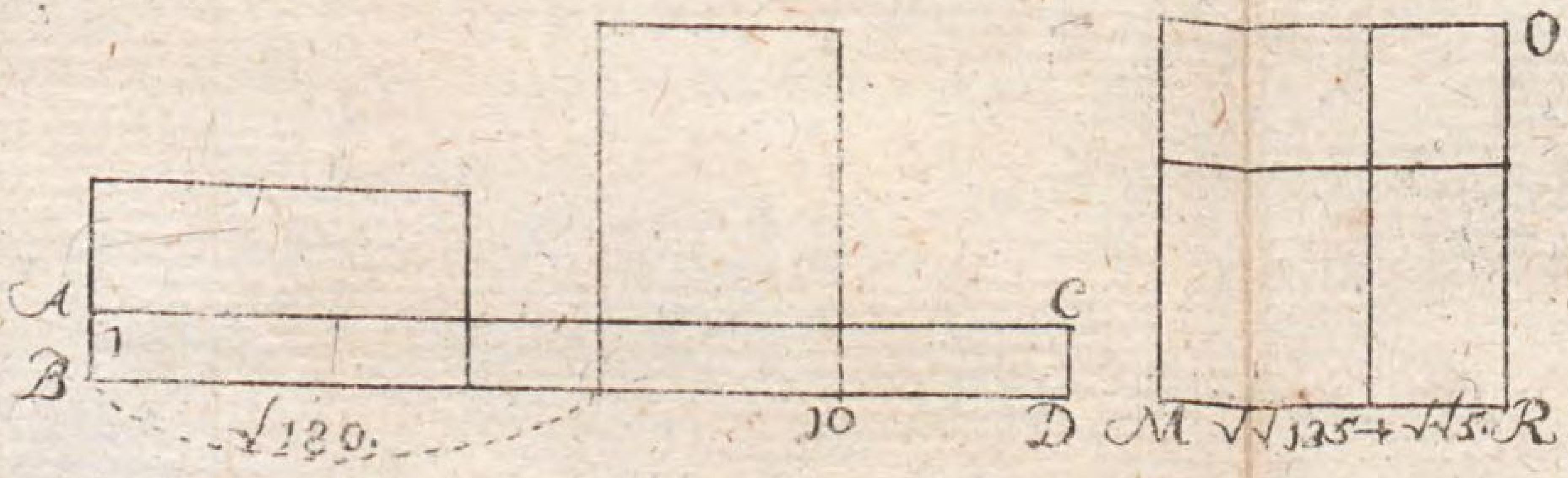
60. Prop.



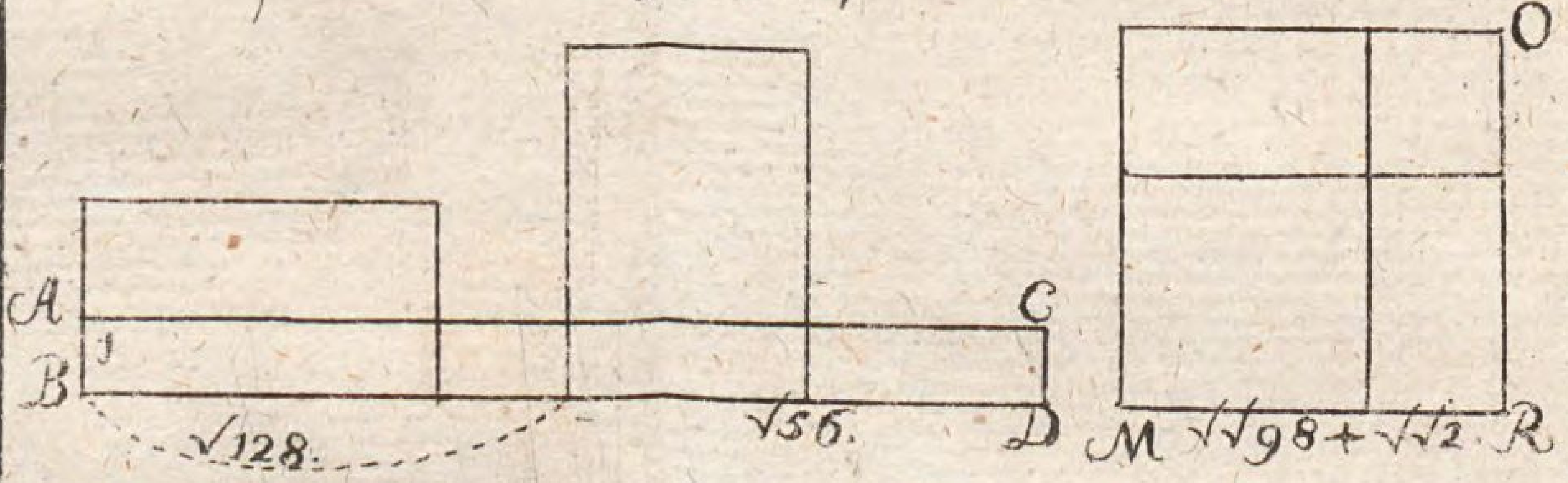
61. Prop.



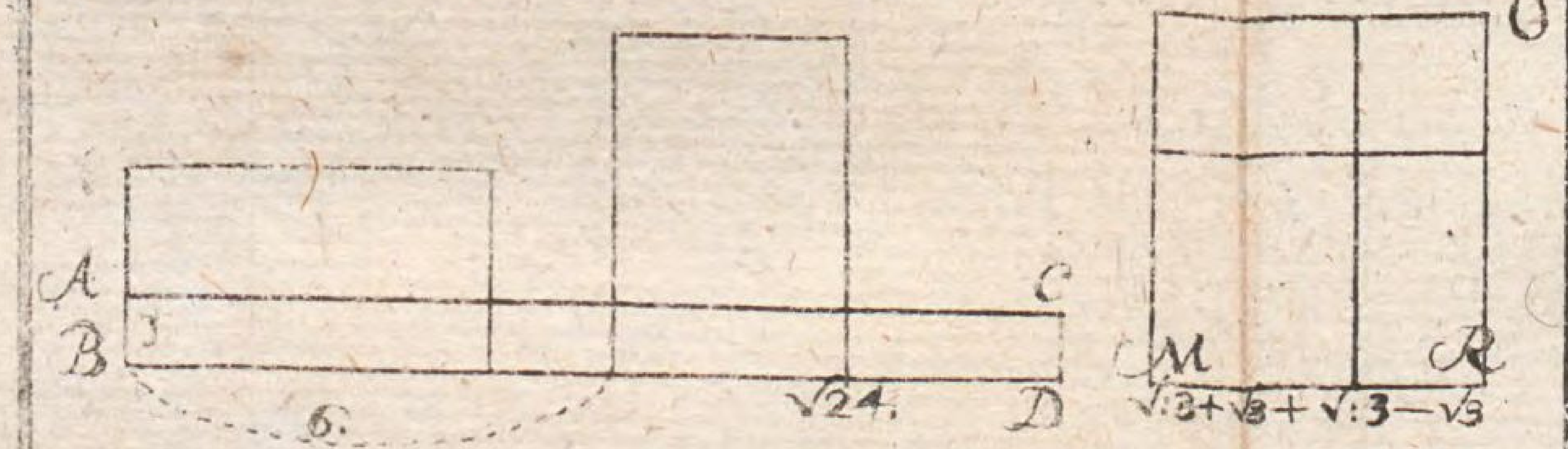
62. Prop.



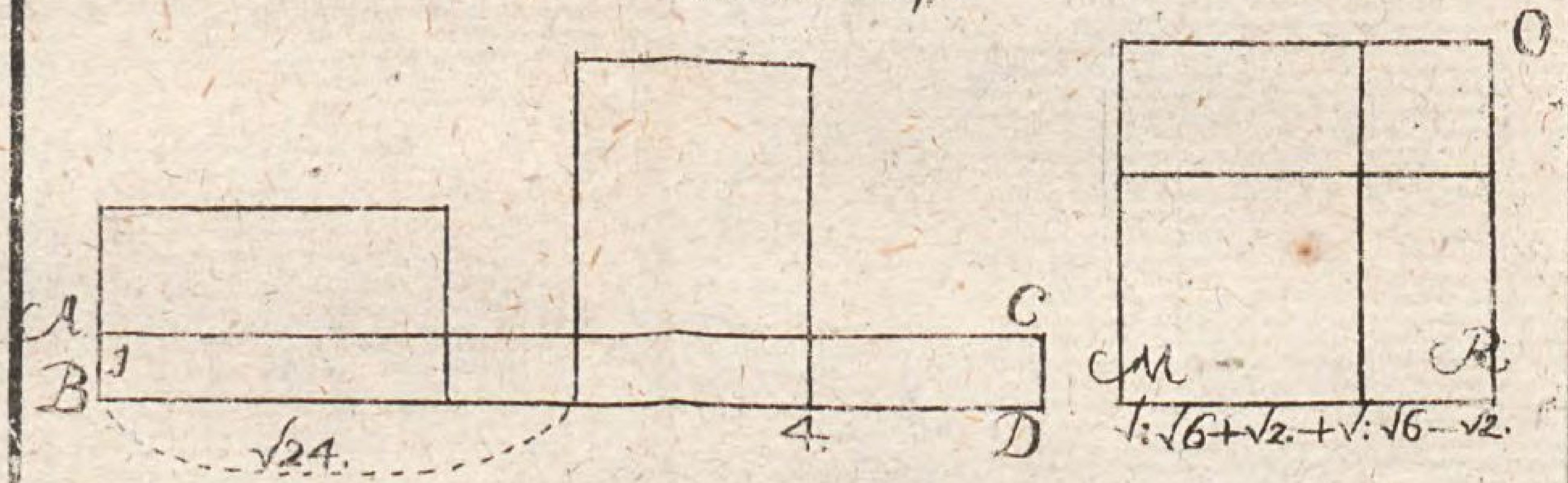
63. Prop.



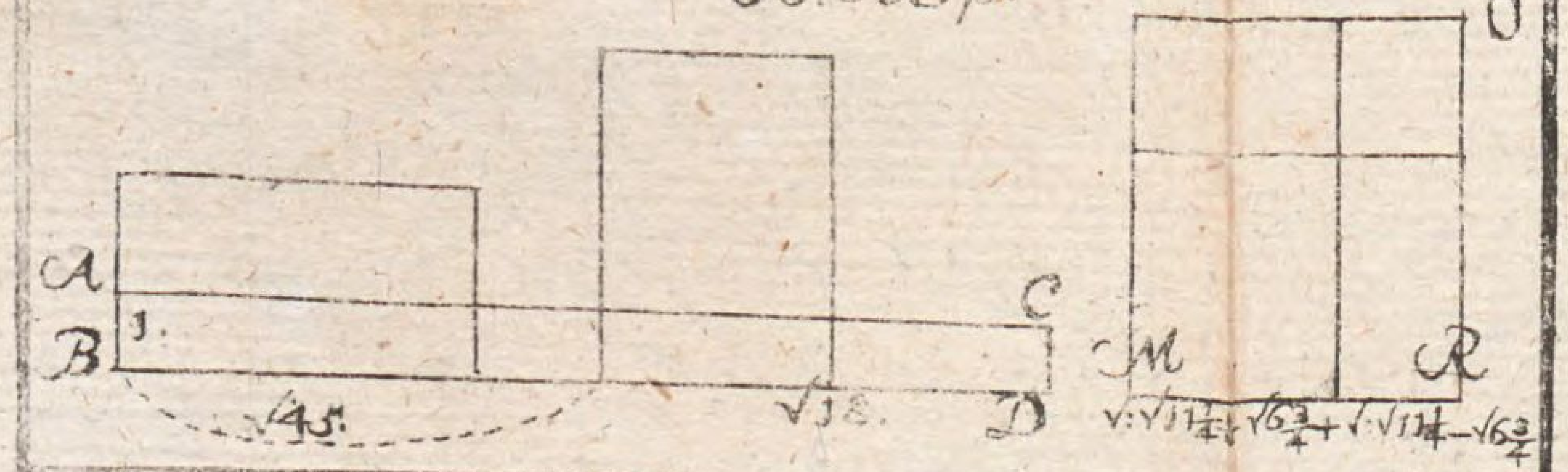
64. Prop.



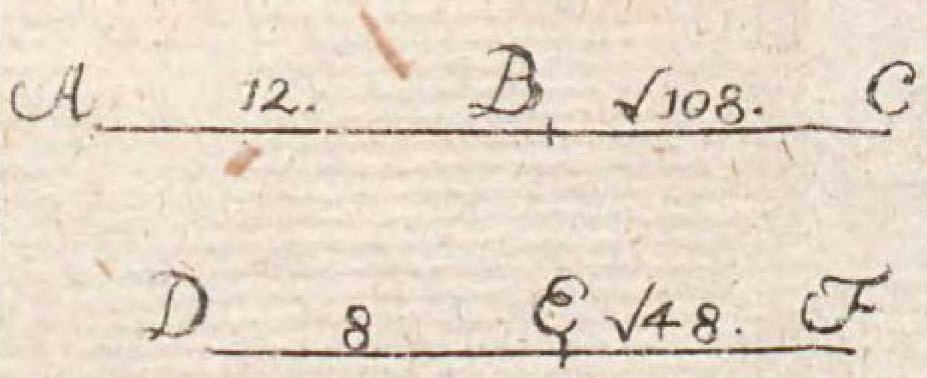
65. Prop.



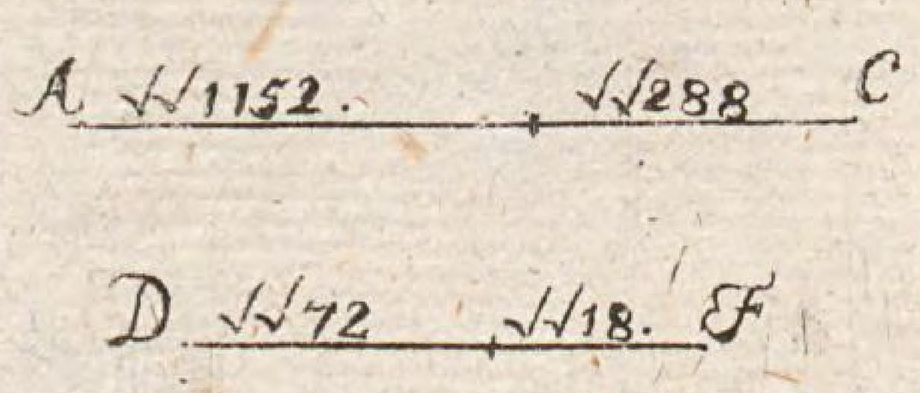
66. Prop.

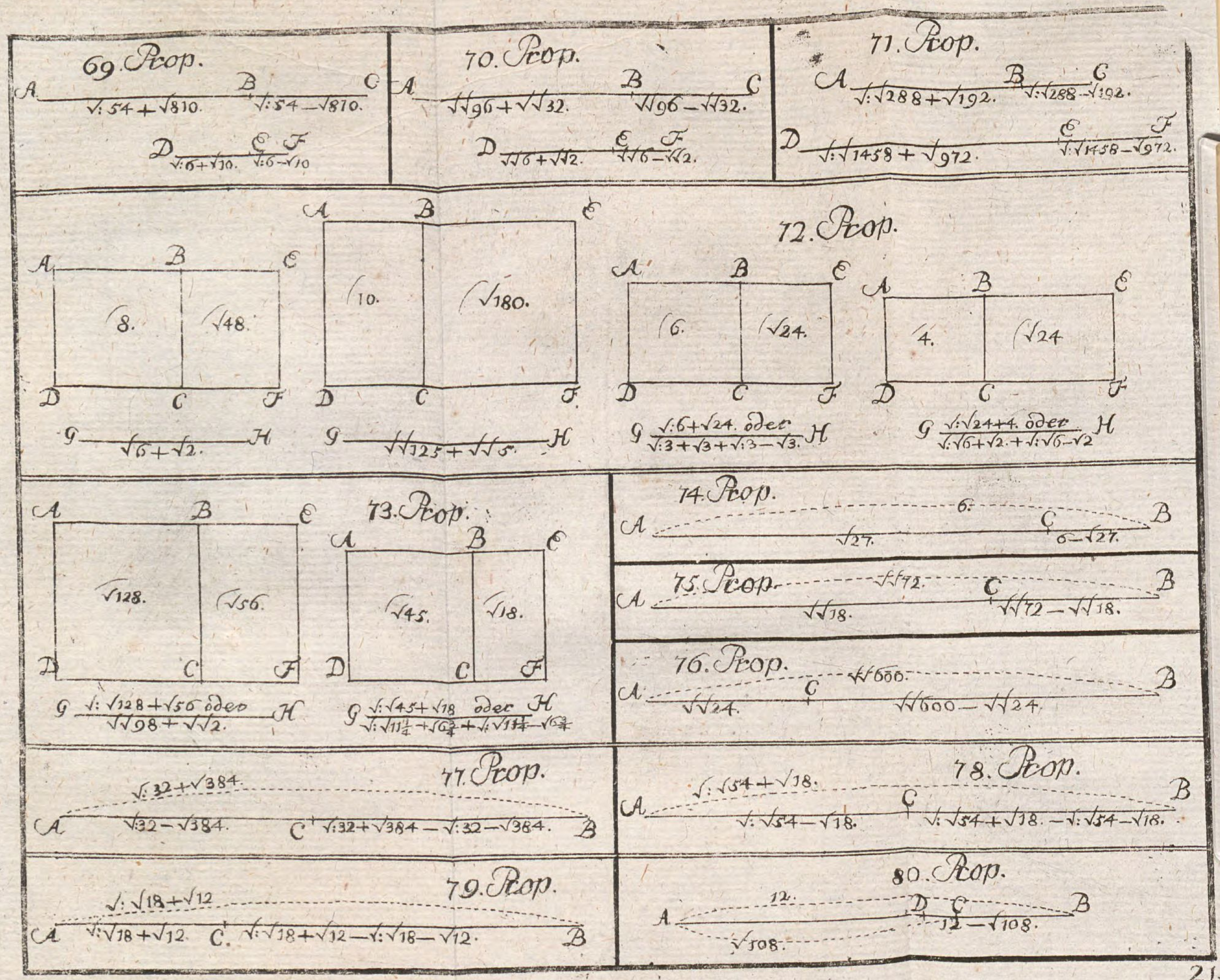


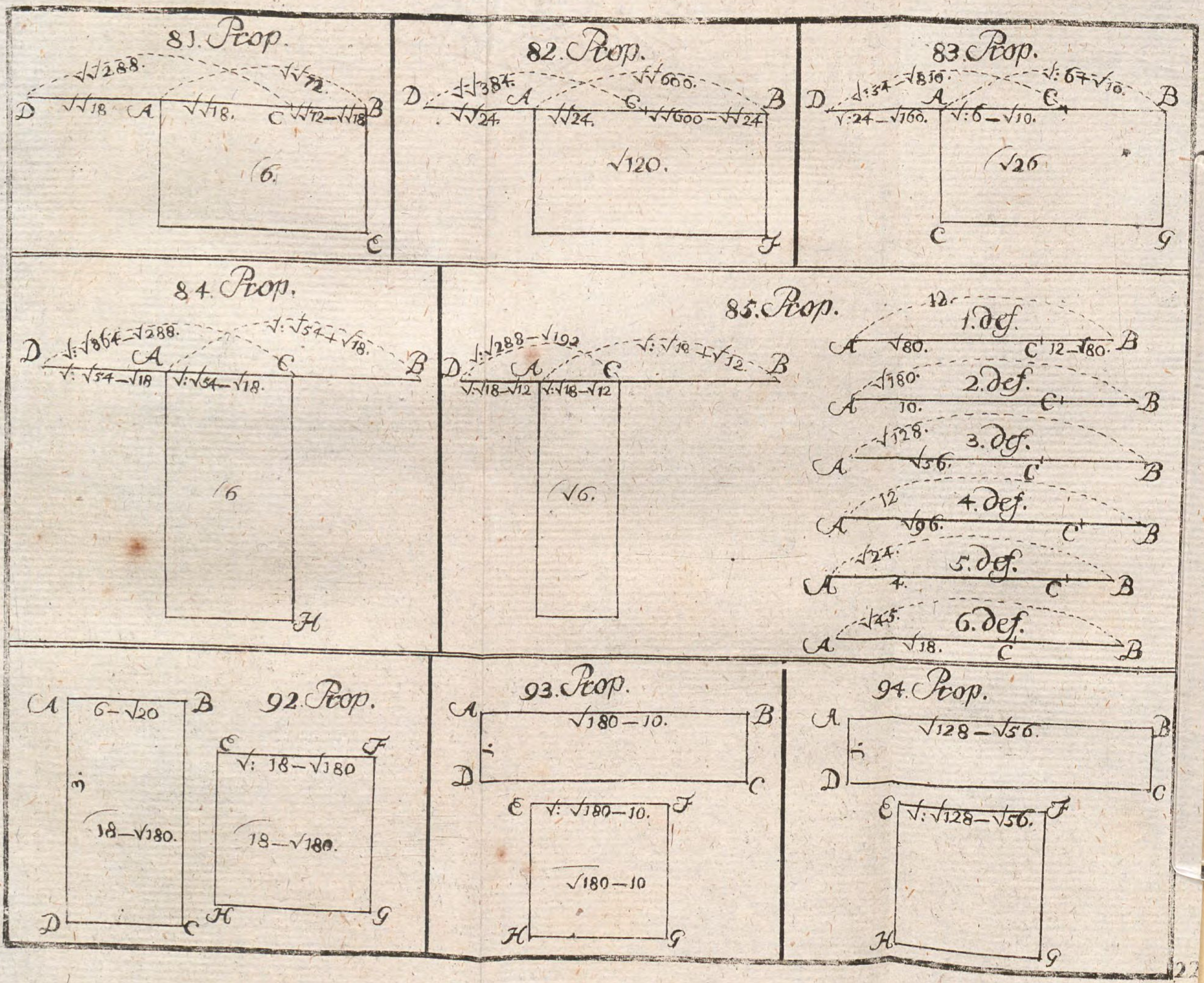
67. Prop.

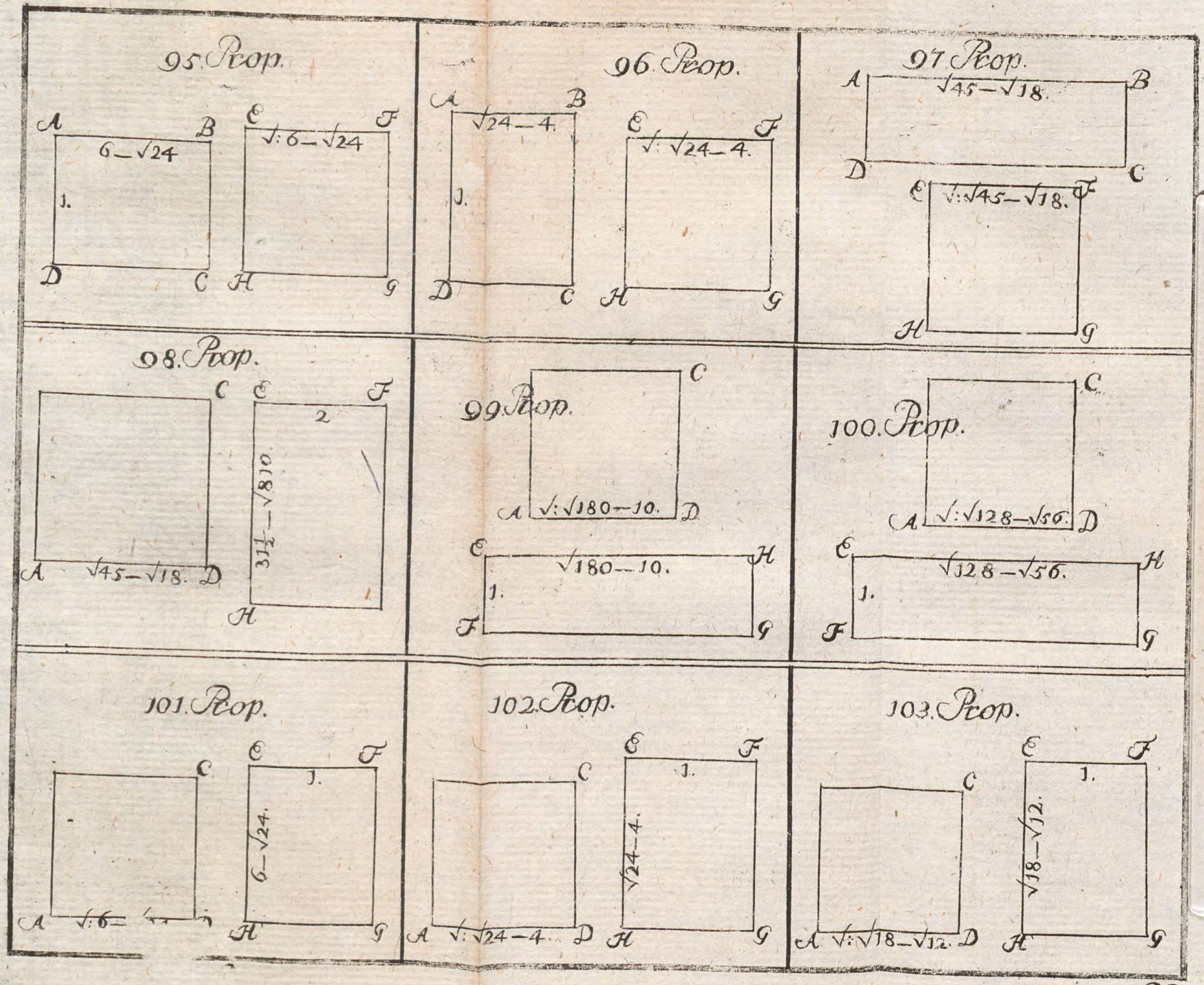


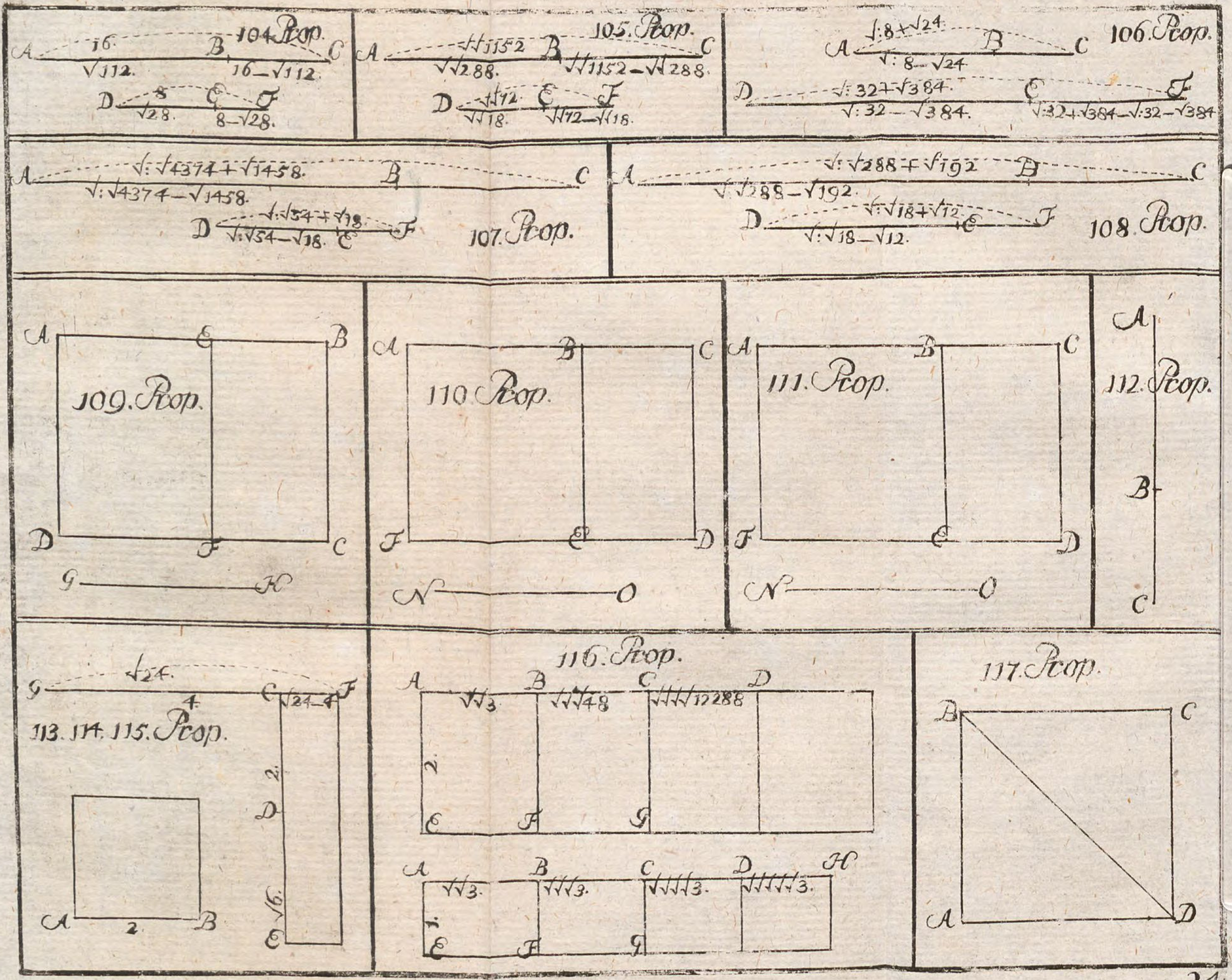
68. Prop.



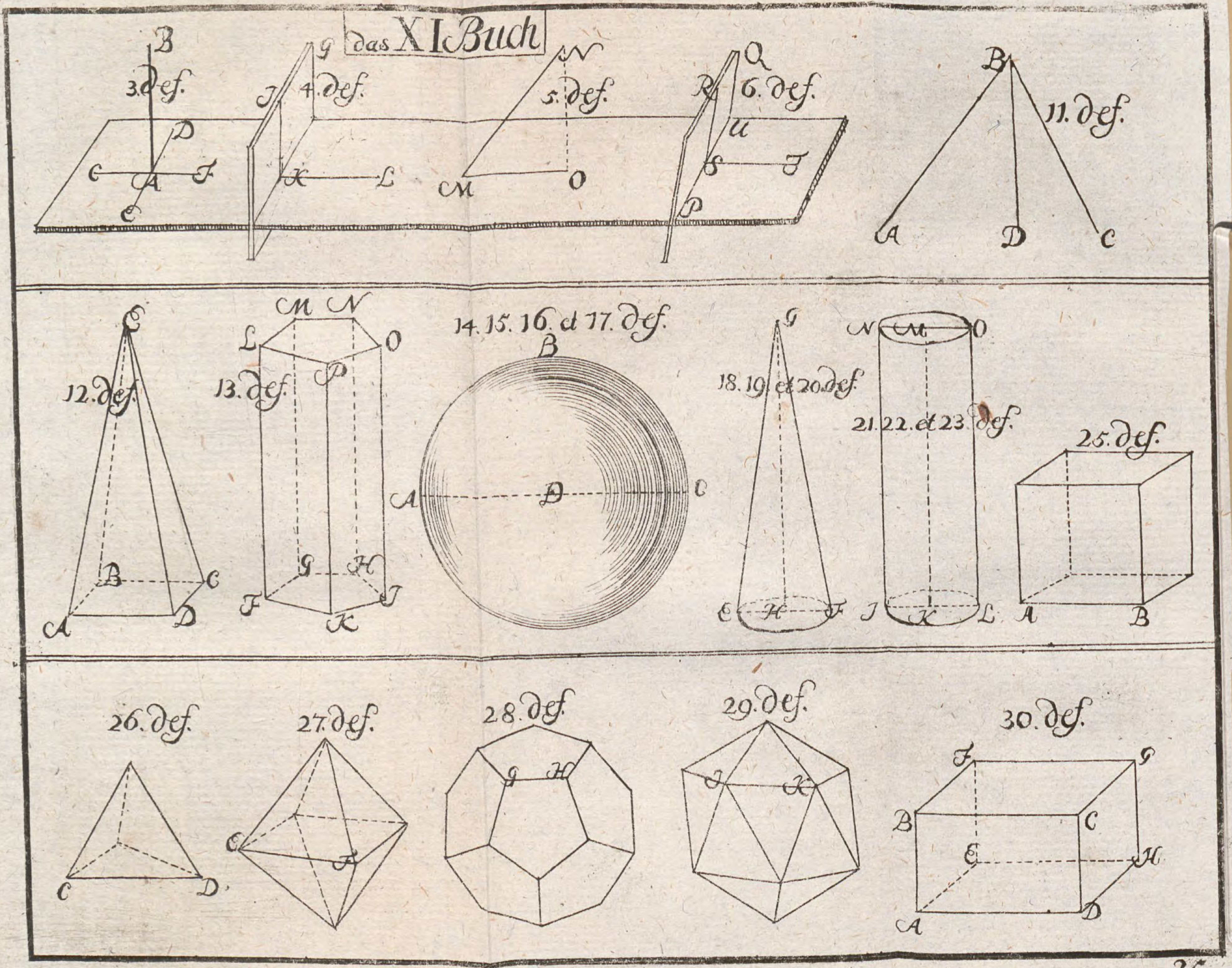

69. Prop.
A B C
√: 54 + √810. √: 54 − √810.
D E F
√: 6 + √10. √: 6 − √10
70. Prop.
A B C
√√96 + √√32. √√96 − √√32.
D E F
√√6 + √√2. √√6 − √√2.
71. Prop.
A B C
√: √288 + √192. √: √288 − √192.
D E F
√: √1458 + √972. √: √1458 − √972.
72. Prop.
A B E
8. √48.
D C F
G √6 + √2. H
A B E
√10. √180.
D C F
G √√125 + √√5. H
A B E
√6. √24.
D C F
G √: 6 + √24. oder √: 3 + √3 + √: 3 − √3. H
A B E
4. √24
D C F
G √: √24 + 4. oder √: √6 + √2. + √: √6 − √2 H
73. Prop.
A B E
√128. √56.
D C F
G √: √128 + √56 oder √√98 + √√2. H
A B E
√45. √18.
D C F
G √: √45 + √18 oder √: √11¼ + √6¾ + √: √11¼ − √6¾ H
74. Prop.
A 6. C B
√27. 6 − √27.
75. Prop.
A √√72. C B
√√18. √√72 − √√18.
76. Prop.
A √√600. C B
√√24. √√600 − √√24.
77. Prop.
√: 32 + √384.
A √: 32 − √384. C √: 32 + √384 − √: 32 − √384. B
78. Prop.
√: √54 + √18.
A √: √54 − √18. C √: √54 + √18. − √: √54 − √18. B
79. Prop.
√: √18 + √12
A √: √18 + √12. C. √: √18 + √12 − √: √18 − √12. B
80. Prop.
12. D C
A B
√108. 12 − √108.

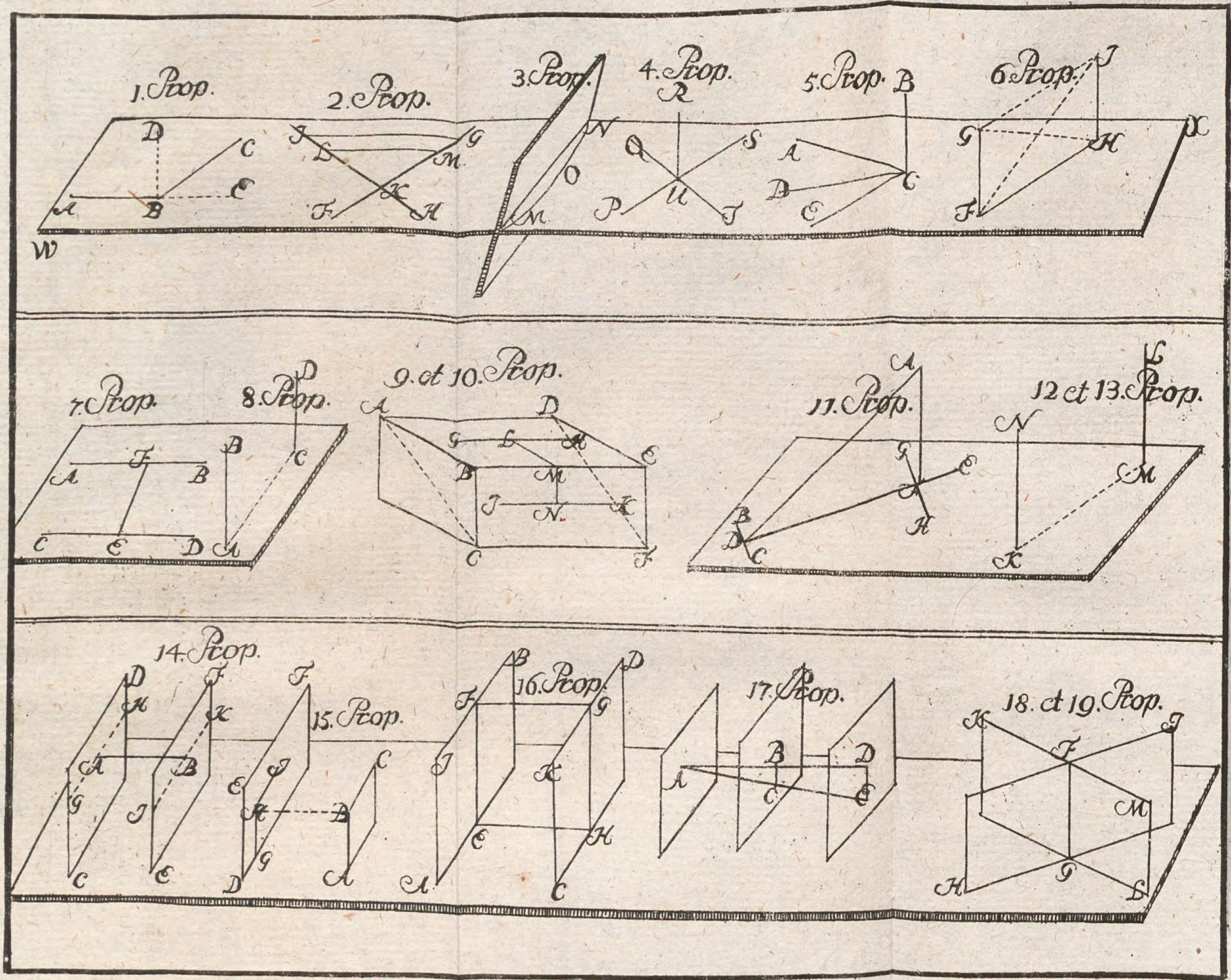

81. Prop.
√√288.
√√72.
D √√18 A √√18. C √√72—√√18 B
√6.
E
82. Prop.
√√384.
√√600.
D A C B
√√24. √√24. √√600—√√24
√120.
F
83. Prop.
√:34—√810.
√:6+√10.
D A C B
√:24—√160. √:6—√10.
√26
C G
84. Prop.
√:√864—√288.
√:√54+√18.
D A C B
√:√54—√18 √:√54—√18.
√6
H
85. Prop.
√:√288—√192
√:√18+√12.
D A C B
√:√18—√12 √:√18—√12
√6.
12.
1. def.
A √80. C 12—√80. B
√180.
2. def.
A 10. C B
√128.
3. def.
A √56. C B
12
4. def.
A √96. C B
√24.
5. def.
A 4. C B
√45.
6. def.
A √18. C B
92. Prop.
A 6—√20 B
3.
18—√180.
D C
E √: 18—√180 F
18—√180.
H G
93. Prop.
A √180—10. B
1.
D C
E √: √180—10. F
√180—10
H G
94. Prop.
A √128—√56. B
1.
D C
E √: √128—√56. F
H G


95. Prop.
A B 6–√24 1. D C
E F √: 6–√24 H G
96. Prop.
A B √24–4. 1. D C
E F √: √24–4. H G
97. Prop.
A B √45–√18. D C
E F √: √45–√18. H G
98. Prop.
C A √45–√18. D
E F 2 31½–√810 H
99. Prop.
C A √: √180–10. D
E H √180–10. 1. F G
100. Prop.
C A √: √128–√56. D
E H √128–√56. 1. F G
101. Prop.
C A √: 6–
E F 1. 6–√24. H G
102. Prop.
C A √: √24–4. D
E F 1. √24–4. H G
103. Prop.
C A √: √18–√12. D
E F 1. √18–√12. H G

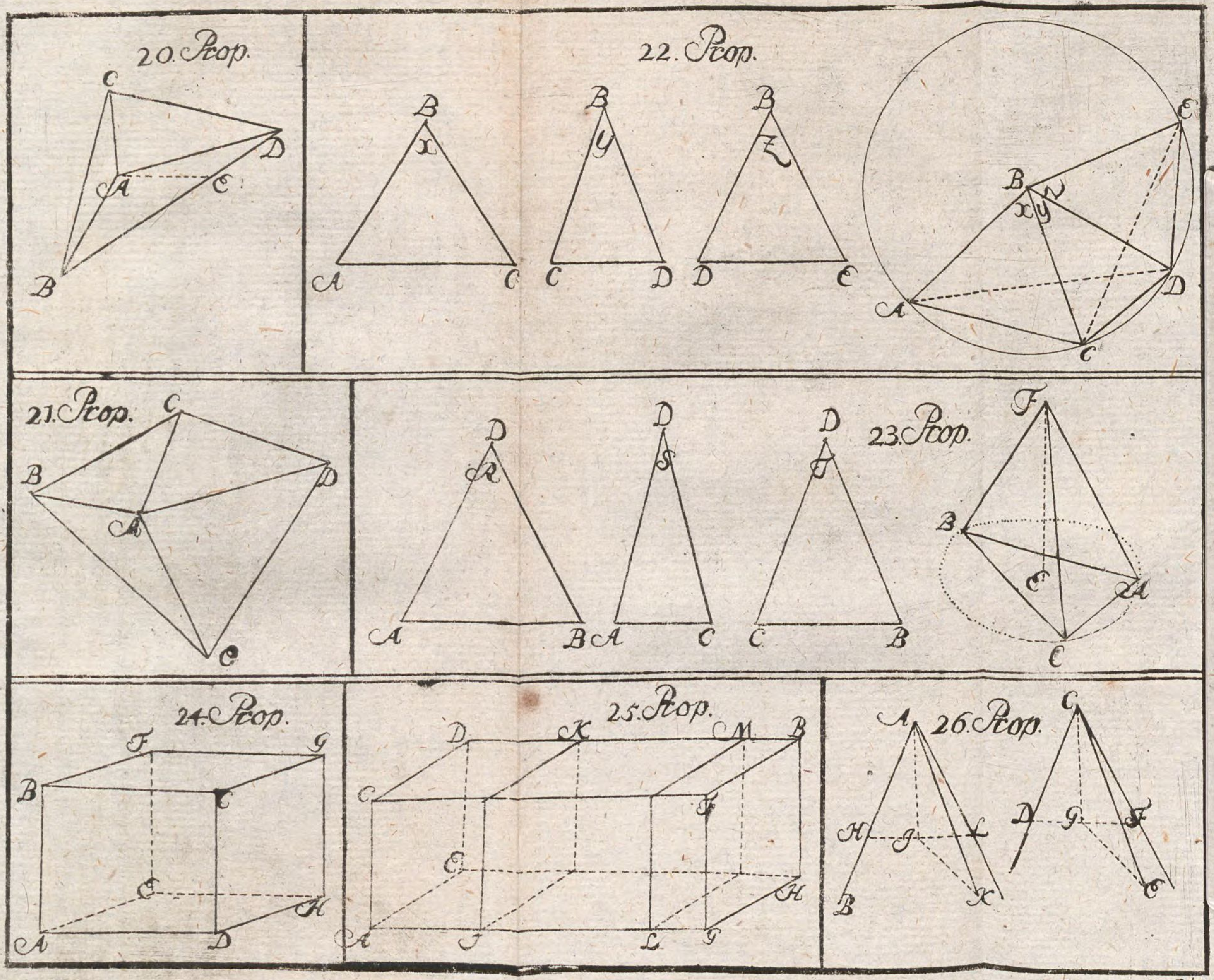

104. Prop.
105. Prop.
106. Prop.
107. Prop.
108. Prop.
109. Prop.
110. Prop.
111. Prop.
112. Prop.
113. 114. 115. Prop.
116. Prop.
117. Prop.

24.

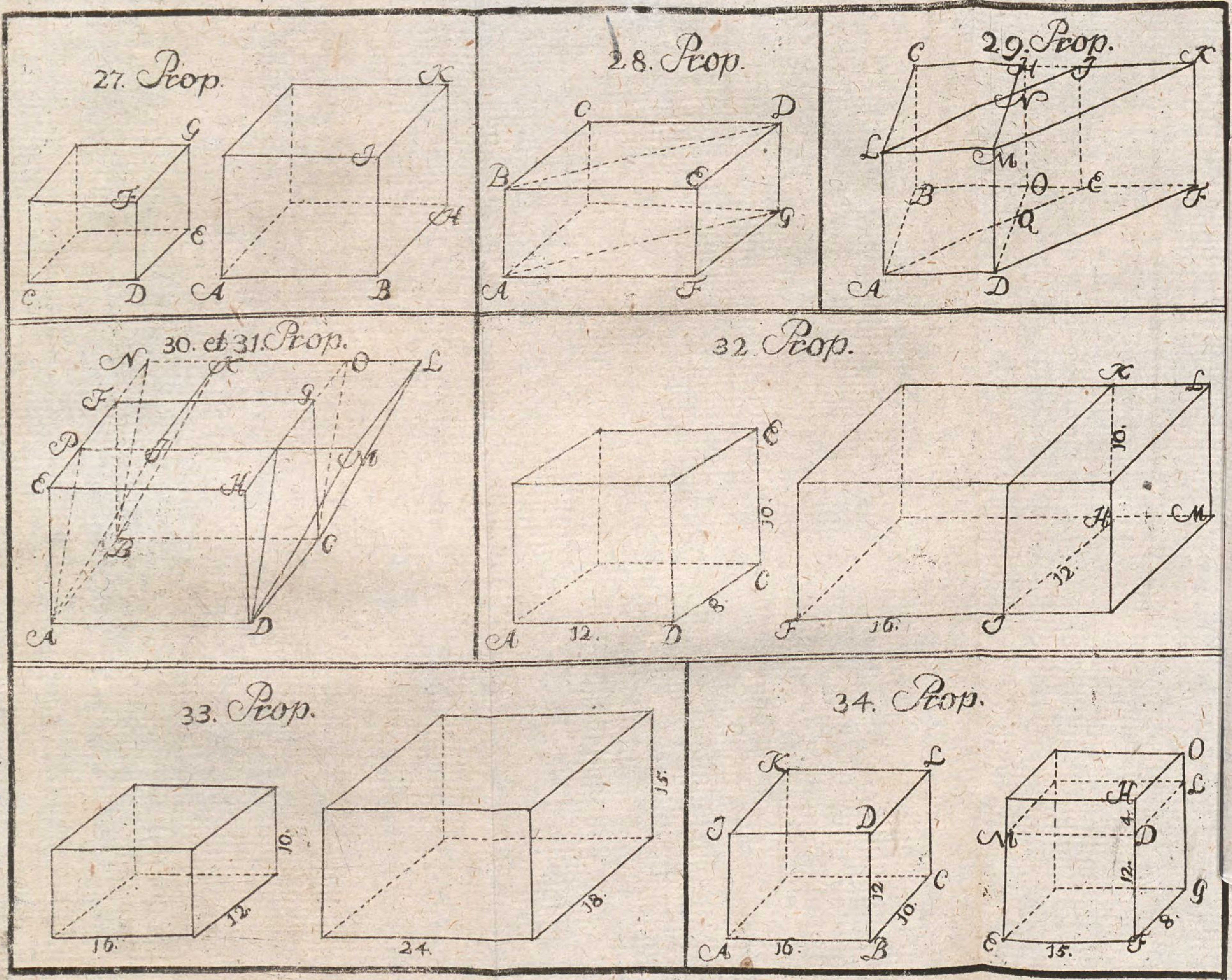

das XI Buch
3. def.
4. def.
5. def.
6. def.
11. def.
12. def.
13. def.
14. 15. 16. et 17. def.
18. 19. et 20. def.
21. 22. et 23. def.
25. def.
26. def.
27. def.
28. def.
29. def.
30. def.

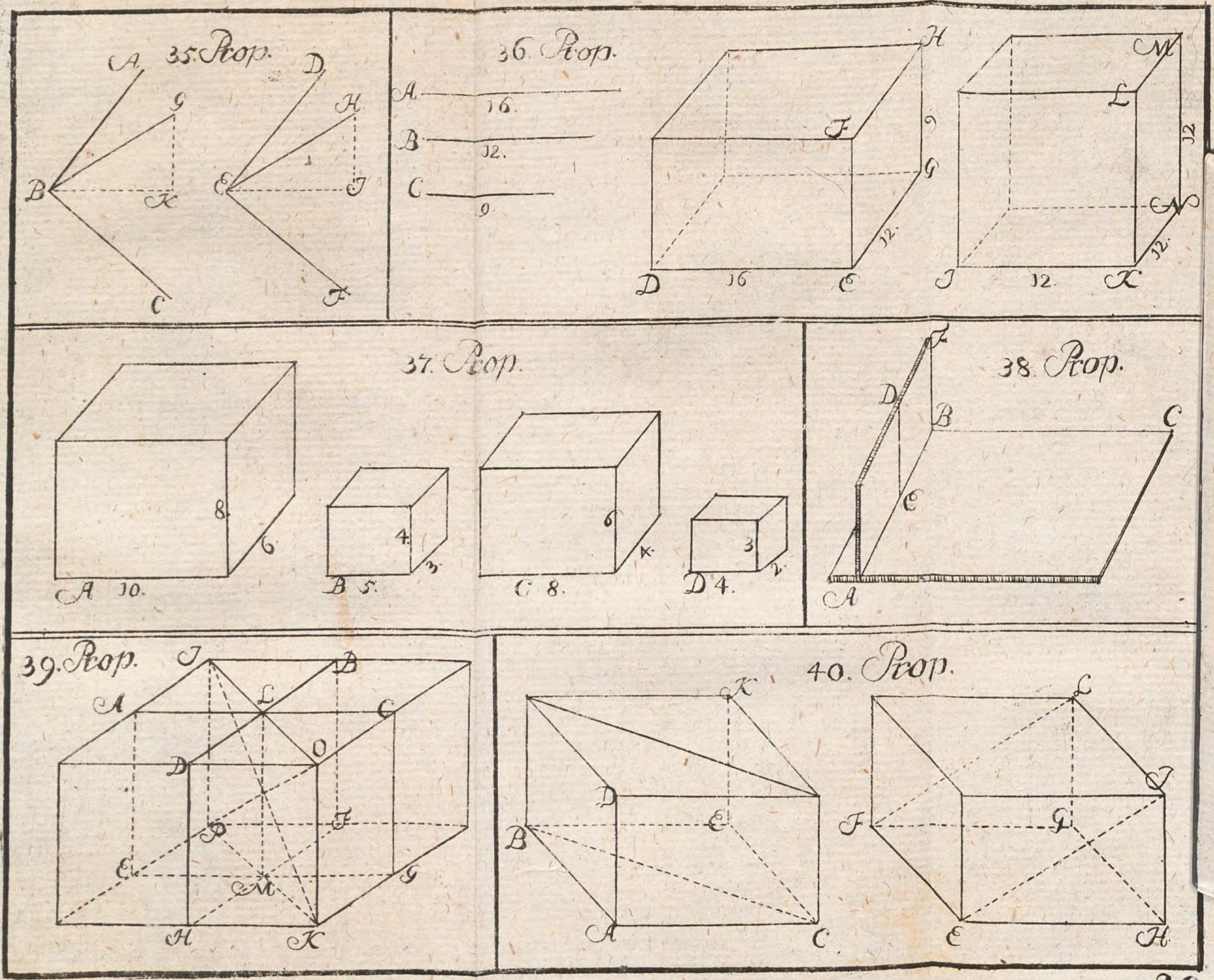

1. Prop.
2. Prop.
3. Prop.
4. Prop.
5. Prop.
6. Prop.
7. Prop.
8. Prop.
9. et 10. Prop.
11. Prop.
12 et 13. Prop.
14. Prop.
15. Prop.
16. Prop.
17. Prop.
18. et 19. Prop.

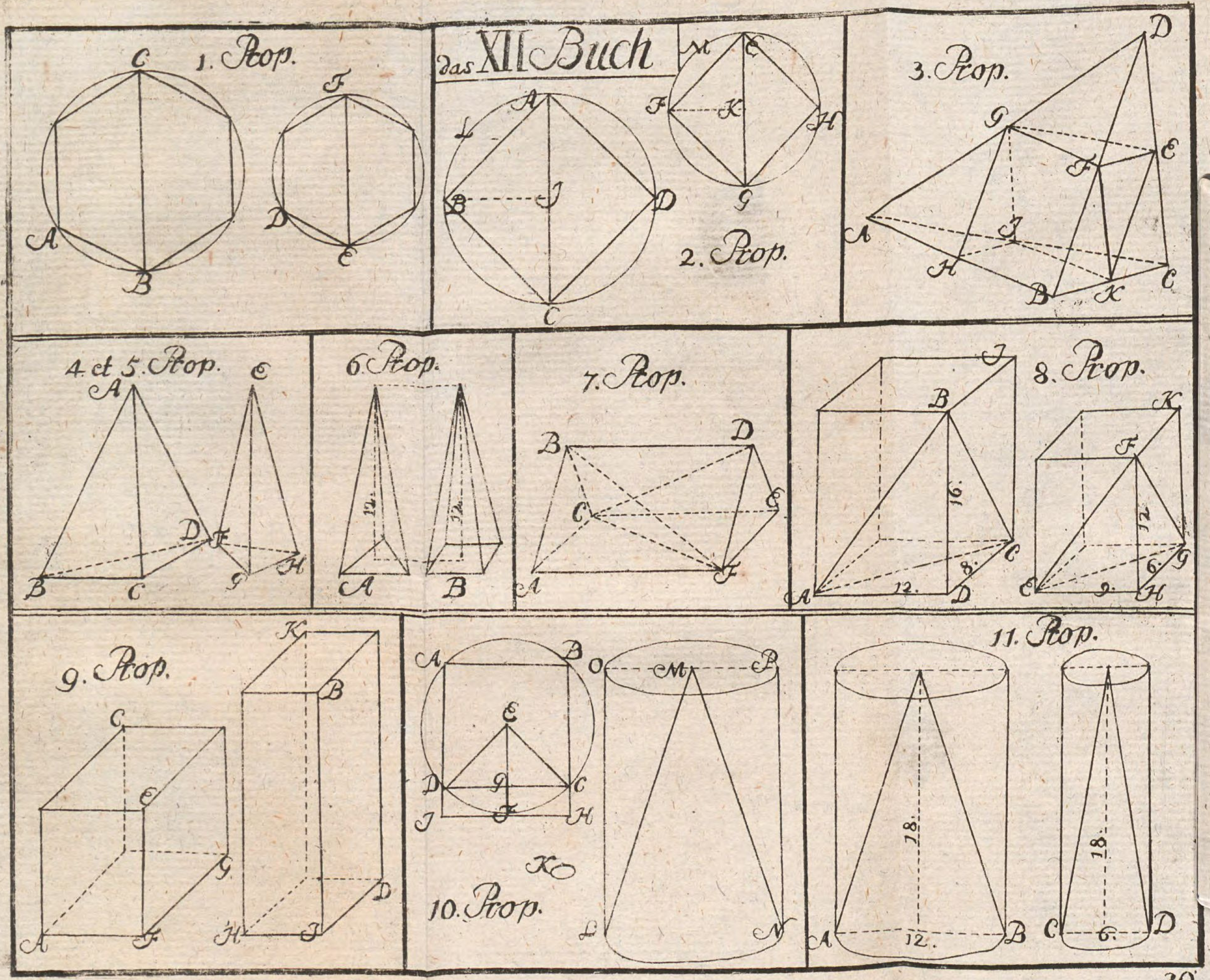
26.


20. Prop.
C
D
A
E
B
22. Prop.
B
x
A
C
B
y
C
D
B
z
D
E
E
B
x y
A
D
C
21. Prop.
C
B
D
A
C
23. Prop.
D
R
A
B
D
S
A
C
D
T
C
B
F
B
E
A
C
24. Prop.
F
G
B
C
E
H
A
D
25. Prop.
D
K
M
B
C
F
E
H
A
I
L
G
26. Prop.
A
H
G
L
B
K
C
D
G
F
E

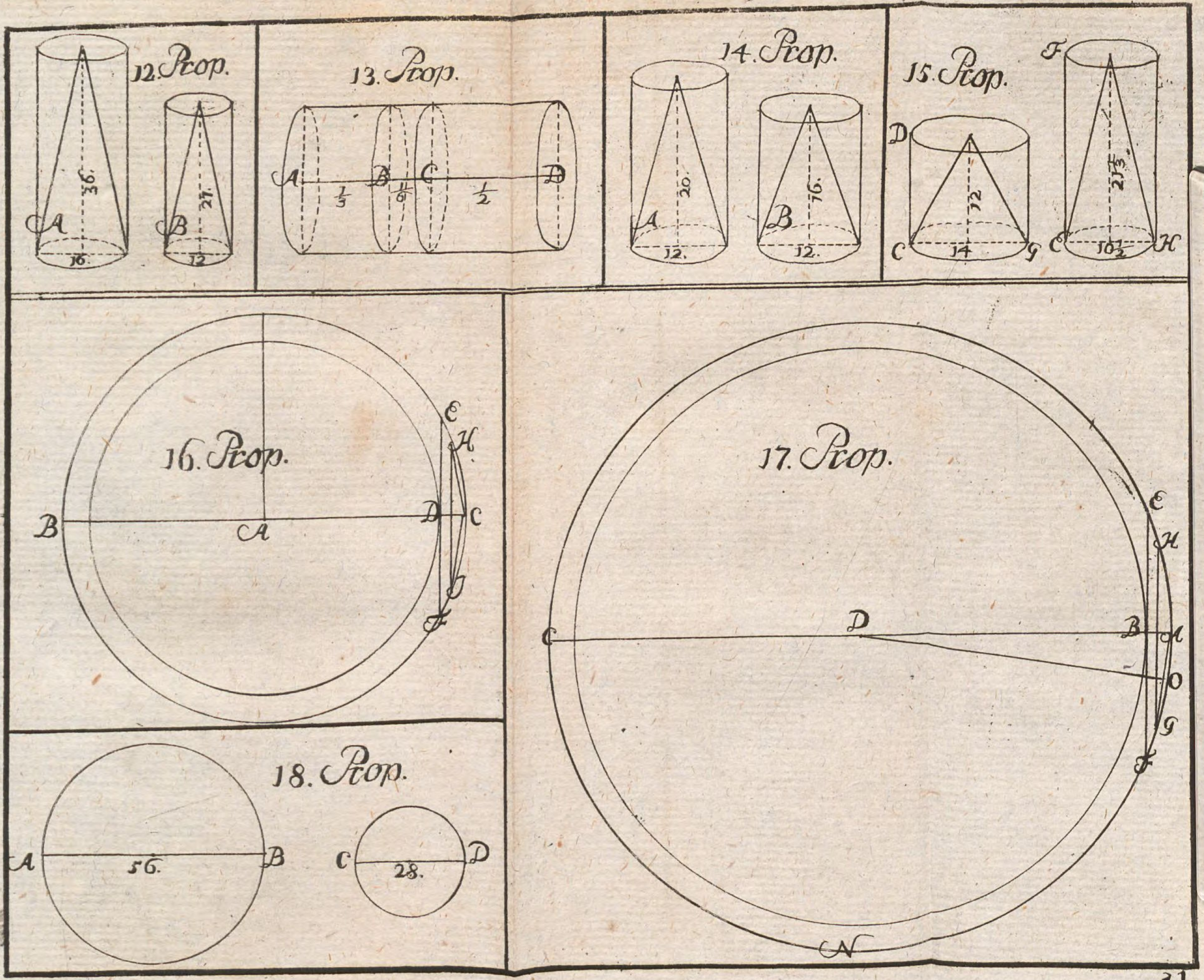
27.


27. Prop.
C D E F G A B H I K
28. Prop.
A B C D E F G
29. Prop.
A B C D E F H I K L M N O Q
30. et 31. Prop.
A B C D E F G H I K L M N O P
32. Prop.
A C D E 12. 8. 10.
F H I K L M 16. 12. 10.
33. Prop.
16. 12. 10.
24. 18. 15.
34. Prop.
A B C D I K L 16. 10. 12.
E F G H L M D O 15. 8. 12. 4.

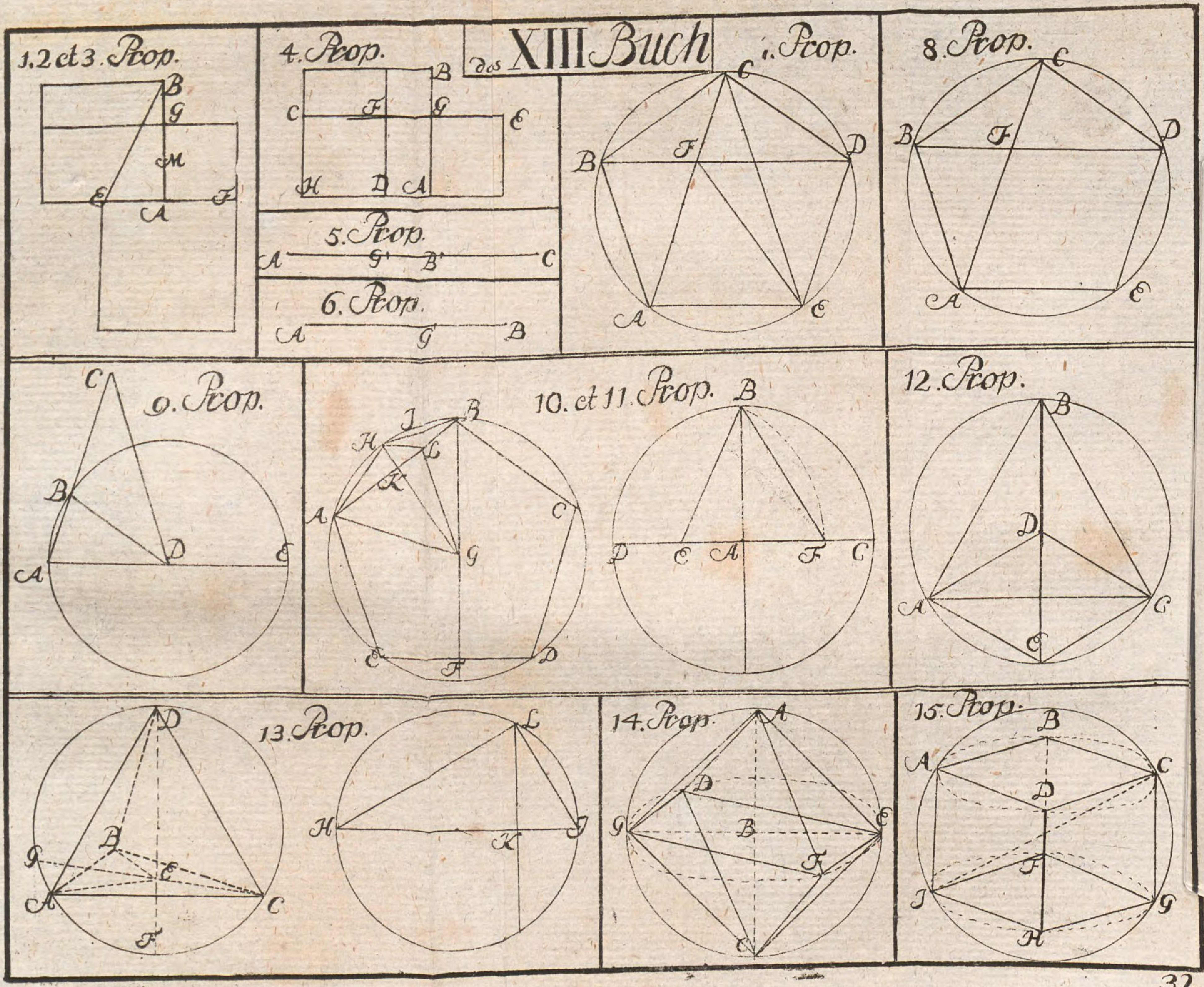

35. Prop.
A
D
G
H
B
E
K
I
C
F
36. Prop.
A
16.
B
12.
C
9
H
F
9
G
12.
D
16
E
M
L
12
N
12.
I
12.
K
37. Prop.
8
6
A 10.
4.
3
B 5.
6
4.
C 8.
3
2
D 4.
38. Prop.
F
D
B
C
E
A
39. Prop.
I
B
A
L
C
O
D
P
F
E
M
G
H
K
40. Prop.
K
D
E
B
A
C
L
I
F
G
E
H

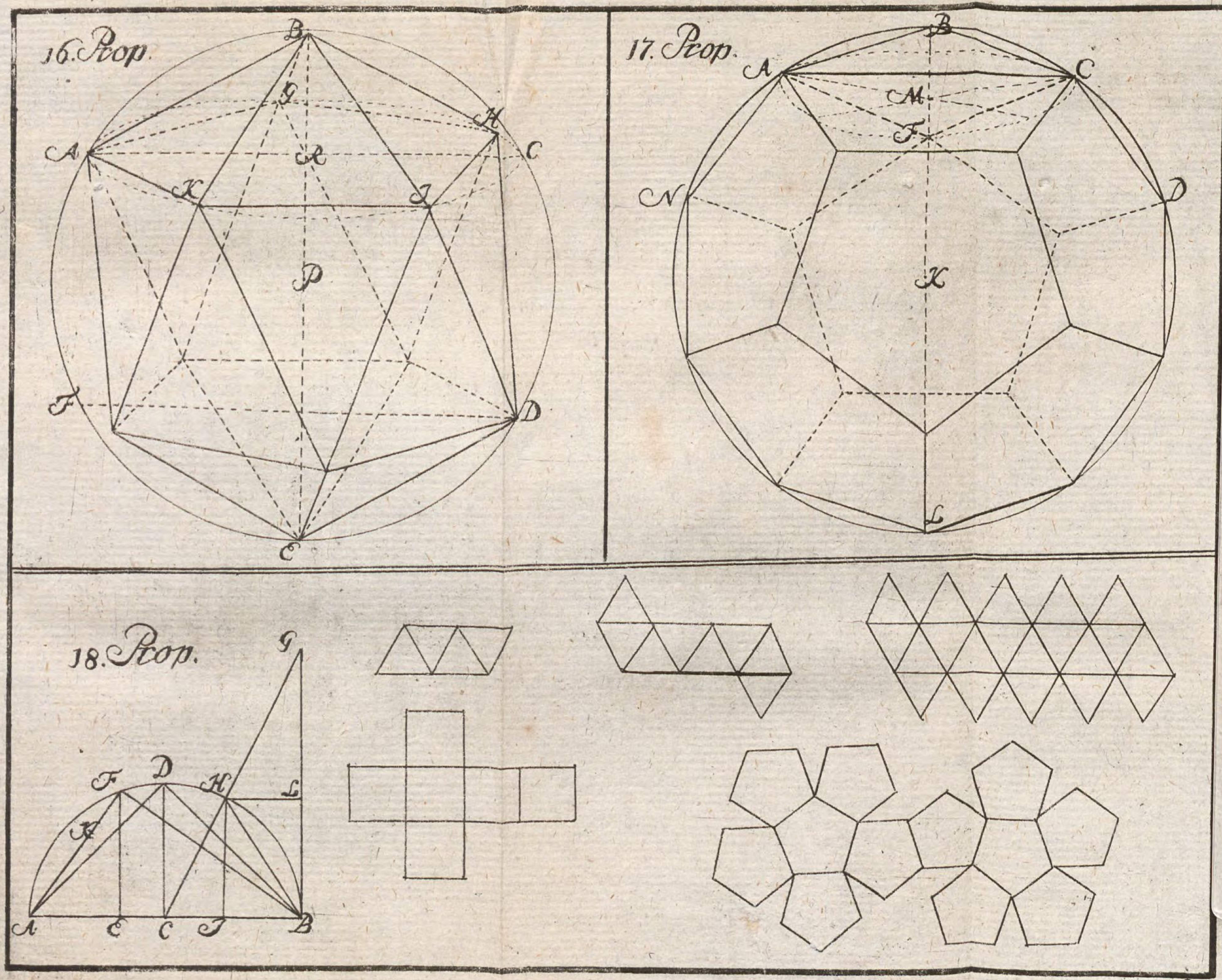

das XII Buch
1. Prop.
2. Prop.
3. Prop.
4. et 5. Prop.
6. Prop.
7. Prop.
8. Prop.
9. Prop.
10. Prop.
11. Prop.

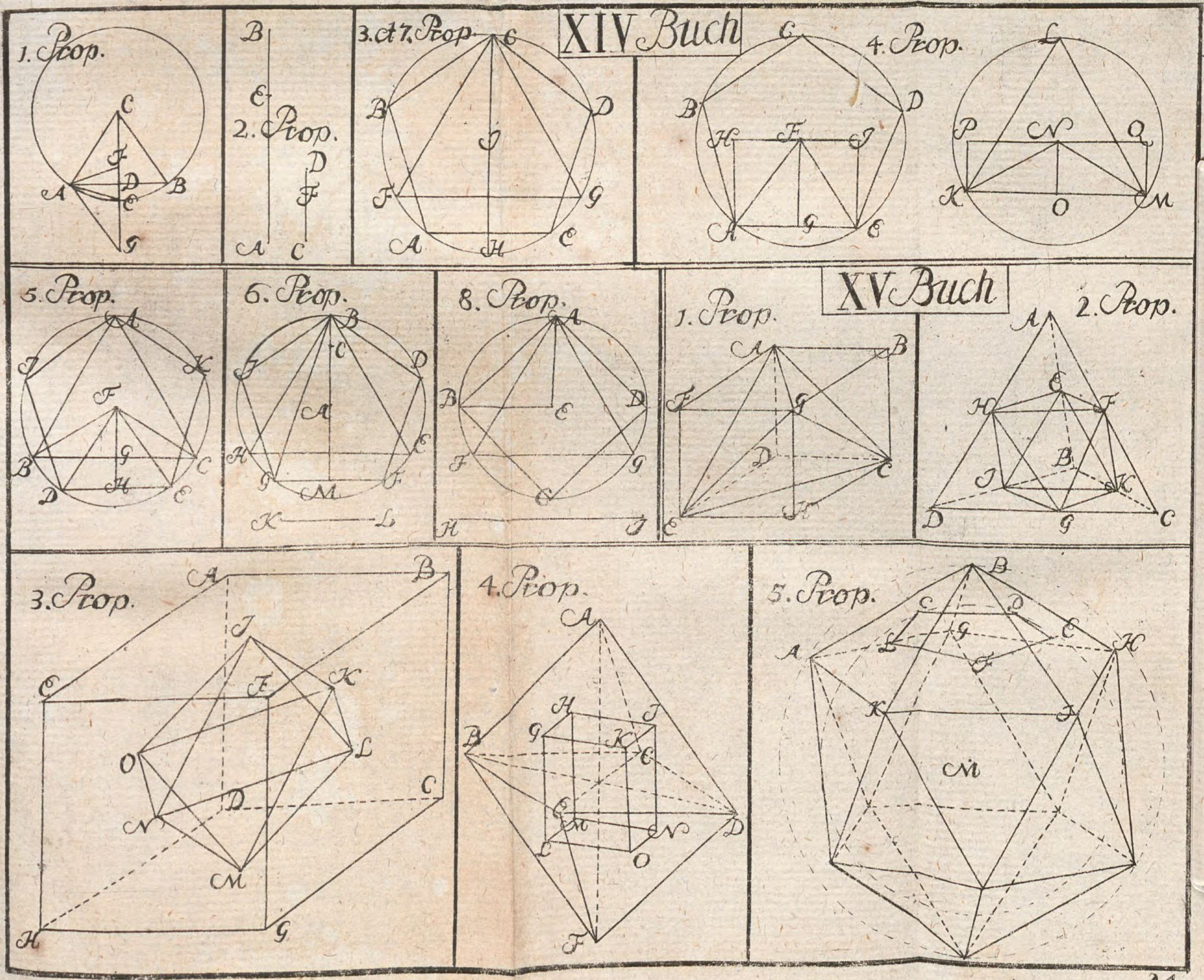
30.



12. Prop.
A
36.
16.
B
27.
12
13. Prop.
A
B
C
D
1/3
1/6
1/2
14. Prop.
A
20.
12.
B
16.
12.
15. Prop.
D
C
32
14
G
F
27 3/7
C
10 1/2
H
16. Prop.
B
A
D
C
E
H
G
F
17. Prop.
C
D
B
A
E
H
O
G
F
N
18. Prop.
A
56.
B
C
28.
D


des XIII Buch
1.2 et 3. Prop.
4. Prop.
5. Prop.
6. Prop.
Prop.
8. Prop.
9. Prop.
10. et 11. Prop.
12. Prop.
13. Prop.
14. Prop.
15. Prop.


16. Prop.
17. Prop.
18. Prop.


XIV Buch
1. Prop.
2. Prop.
3. et 7. Prop.
4. Prop.
5. Prop.
6. Prop.
8. Prop.
XV Buch
1. Prop.
2. Prop.
3. Prop.
4. Prop.
5. Prop.

CEO

Euclides,

Euclidis 15. Bücher Teutsch Auf eine besondere kurtze Art, iedoch ausfü
hrlich abgehandelt, und so wohl in Linien, als durch Zahlen, in specie das
Zehende Buch, mit denen sonst schwer fallenden irrational-Größen, Linien,
und Flächen, aufs deutlichste definiret, erkläret und bewiesen, auch
durchgehends alle 15. Bücher an statt der sonst gewöhnlichen obscuren

Dreßden 1723

A.gr.b. 1437
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10235924-3
VD18 10243798